This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

600015188T

E

1812 d. 18

itung (E).

Buches finden drei Rechnungs-
Anwendung. Zum Verständnis
näher einzugehen. Es sind:
Addition, b. der Korrespon-
der symmetrischen Glei-
des.

Addition (AG. I. 18), ab-
k. A.
gleichung

$$= \frac{C}{D},$$

ganz allgemein die neue Quo-

$$\frac{Cm + Dn}{Cp + Dq}$$

q ganz beliebig sind. Setzt
gleich z, so ist $A = Bz$,
(2), so ergiebt sich die
Wir haben demnach den

chung kann man be-
gleichungen bilden.
Nenner erstens
toren m und n,
zu Zählern;

8 20.

ZUR

FORMATION

QUADRATISCHER GLEICHUNGEN.

VON

DR. ERNST BARDEY.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1884.

Im Weiterschreiten finde Qual und Glück,
Du, unbefriedigt jeden Augenblick.

G.

BODLEIAN LIBRARY
18 AUG 84
OXFORD.

Vorwort.

In meinen „Algebraischen Gleichungen“ habe ich eine grofse Anzahl von Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung mitgeteilt. Man kann nicht wohl annehmen, dafs die dort vorkommenden Gleichungen durch Probiren gefunden oder der Phantasie entsprungen sind; ganze Klassen von Gleichungen müssen nach gewissen allgemeinen Gesetzen gebildet sein und in einer bestimmten Beziehung zu einander stehen. Ein mindestens ebenso grofses Interesse, als die Gleichungen selber und ihre Auflösungen, werden daher, wie ich glaube, die Fragen haben: Wie sind jene Gleichungen entstanden? Welches ist der Schlüssel zur Aufstellung derselben? Welches ist der Zusammenhang derselben unter einander? Giebt es verschiedene Methoden, nach welchen sie sich aufstellen lassen? Wie kommt man überhaupt auf jene eigentümlichen Formen? Und wenn die Form von Gleichungen allgemein festgestellt ist, wie mufs man die Form speciell bestimmen, wenn die Lösung entweder ganz oder ihrer Form nach gegeben ist?

Diese Fragen in Bezug auf alle in den „Algebraischen Gleichungen“ vorkommenden wichtigen Gleichungen zu erledigen, war ursprünglich der Zweck dieser Arbeit. Meine körperlichen Verhältnisse liefsen mich jedoch befürchten, dafs ich die Arbeit nicht beendigen würde; ich mufste dieselbe abbrechen. Es ist hier daher nur ein sehr kleiner Teil der „Algebraischen Gleichungen“ nach der angegebenen Richtung hin behandelt, aber, wie ich hoffe, der interessanteste. Es sind diejenigen Gleichungen, welche sich aus homogenen symmetrischen Gleichungen des 4. Grades ableiten lassen, oder deren Form doch in der Auflösung der homogenen symmetrischen Gleichungen des 4. Grades, wie sie in den „Algebraischen Gleichungen“ gegeben ist, ihren Ursprung hat.

Aufserdem sind hier viele Hunderte neuer Gleichungen aufgestellt und die Methoden angegeben, nach welchen man Gleichungen von der zierlichsten Form mit vorherbestimmten Lösungen in beliebiger Anzahl leichtlich formiren kann.

Der Gegenstand ist, so viel ich weifs, bis jetzt von keinem Mathematiker berührt worden. Eine Andeutung der hier vorkommenden Entwickelungen habe ich bereits in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht XV, Heft 3, S. 161—179 gegeben. Die Leser werden sehen, dafs die hier vorgetragenen und angewendeten Methoden nicht nur für die hier aufgeführten und aufgestellten Gleichungen, sondern ganz allgemein für die Formation und Transformation der Gleichungen von grofser Fruchtbarkeit und weittragender Bedeutung sind.

Die in jedem Abschnitte vorangestellten Gleichungen sind aus den „Algebraischen Gleichungen“ entlehnt; sie sind den Betrachtungen in den betreffenden Abschnitten zum Grunde gelegt. Sie tragen dieselben Nummern, welche sie in den „Algebraischen Gleichungen“ haben.

Die Abschnitte I—XIV enthalten quadratische Gleichungen. Die Gleichungen in den Abschnitten XV—XXV gehen fast ausnahmslos über den zweiten Grad hinaus, sind jedoch alle quadratisch lösbar.

Meine bisherigen mathematischen Arbeiten sind von den Herren Collegen mit Beifall aufgenommen worden; möge dieser Arbeit bei ihnen eine nicht minder freundliche Aufnahme zu Teil werden.

Bad Stuer, im Mai 1884.

Der Verfasser.

Bezeichnungen.

1. AG. heifst Algebraische Gleichungen und bezieht sich auf das von mir verfafste Buch dieses Namens*).

2. korr. Add. oder kurz k. A. heifst korrespondirende Addition und bezieht sich auf a. in der Einleitung.

3. KS. heifst Korrespondenzsatz und bezieht sich auf b. in der Einleitung.

4. E. heifst Einleitung; Ea., Eb., Ec. verweisen daher auf die Teile a., b. und c. in der Einleitung,

5. Zahlen, welche in eckige Klammern eingeschlossen sind, beziehen sich auf die „Algebraischen Gleichungen“. Steht AG. vor denselben, so sind die eckigen Klammern fortgelassen. Dies ist auch bei denjenigen Zahlen geschehen, welche die Nummern der Gleichungen angeben, die vorn zu Anfang jedes Abschnittes aufgeführt sind.

6. Die römischen Zahlen haben eine dreifache Bedeutung. Meistens beziehen sie sich auf die Abschnitte des Buches; sie haben dann einen Punkt hinter sich. In der Regel steht hinter denselben noch ein kleiner Buchstabe; so kommt z. B. Ia., IVb., Vk. vor und heifst bezw. Teil a. im 1. Abschnitt, b. im 4. Abschnitt, k. im 5. Abschnitt. — Auch die vorkommenden allgemeinen Gleichungen und Formeln sind mehrfach mit I, II, III u. s. w. bezeichnet. Sie haben im Texte keinen Punkt hinter sich. Der Zusammen-

*) Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von E. Bardey. Verlag von B. G. Teubner. 1. Aufl. 1868; 3. Aufl. 1883.

hang läſst übrigens ihre Bedeutung leicht erkennen. — Drittens endlich können sich die römischen Zahlen I und II auch auf die beiden ersten Teile der „Algebraischen Gleichungen" beziehen. Dann sind sie in eckige Klammern eingeschlossen, oder es steht AG. vor denselben.

Inhalt.

Die grofsen Buchstaben A, B, C u. s. w. bedeuten Ausdrücke von der Form $\alpha a + \beta b + \gamma x$, wo α, β, γ specielle Zahlzeichen sind.

Einleitung (E).

In allen Abschnitten dieses Buches finden drei Rechnungsformen eine besonders vielfache Anwendung. Zum Verständnis ist es notwendig, auf dieselben näher einzugehen. Es sind: a. die korrespondirende Addition, b. der Korrespondenzsatz, c. die Auflösung der symmetrischen Gleichungen des vierten Grades.

a. Die korrespondirende Addition (AG. I. 18), abgekürzt korr. Add. oder einfach k. A.

Hat man eine Quotientengleichung

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

so kann man aus derselben ganz allgemein die neue Quotientengleichung

$$(2) \qquad \frac{Am + Bn}{Ap + Bq} = \frac{Cm + Dn}{Cp + Dq}$$

bilden, wo die Faktoren m, n, p, q ganz beliebig sind. Setzt man den Wert der Quotienten in (1) gleich z, so ist $A = Bz$, $C = Dz$. Substituirt man dies in (2), so ergiebt sich die Richtigkeit dieser Gleichung sofort. Wir haben demnach den Satz:

1. Aus einer Quotientengleichung kann man beliebig viele andere Quotientengleichungen bilden. Man multiplicirt die Zähler und Nenner erstens bezw. mit den willkürlichen Faktoren m und n, addirt sie und macht die Summen zu Zählern; zweitens bezw. mit den willkürlichen Faktoren p und q, addirt sie und macht die Summen zu Nennern der neuen Quotientengleichung.

Da dieser Satz im Folgenden sehr vielfach angewendet wird, so mufste er einen besondern Namen erhalten. Was mit dem Zähler und Nenner links in (1) gemacht ist, mufs auch korrespondirend mit dem Zähler und Nenner rechts gemacht werden. Da ferner die willkürlichen Faktoren stets so gewählt werden können, dafs bei der Kombination der Produkte eine Addition eintritt, so ist es gerechtfertigt, ihn den Satz von der korrespondirenden Addition und das durch ihn vermittelte Verfahren korrespondirende Addition zu nennen.

Speciell wird man aus der Gleichung (1) nach dem angegebenen Verfahren auch bilden können:

$$1)\quad \frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D}$$

$$2)\quad \frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D}$$

$$3)\quad \frac{A}{A-B} = \frac{C}{C-D}$$

$$4)\quad \frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D}$$

$$5)\quad \frac{2A+3B}{3A-2B} = \frac{2C+3D}{3C-2D} \text{ u. s. w.}$$

Bildet man die Gleichung 1), so ist das Verfahren im Folgenden kurz einfache korrespondirende Addition genannt. Bildet man die Gleichung 3) oder 4), so ist das Verfahren korrespondirende Subtraktion (korr. Subtr.) genannt.

Steht in (1) rechts statt des Quotienten eine ganze Zahl C, so kann man die ganze Zahl in einen Bruch verwandeln, indem man 1 als Nenner nimmt. Dann hat man:

$$\frac{A}{B} = C = \frac{C}{1}$$

$$(3)\qquad \frac{A+B}{A-B} = \frac{C+1}{C-1} \text{ u. s. w.}$$

Hat man die Gleichung

$$(4)\qquad \frac{u+v}{u-v} = \frac{u_1+v_1}{u_1-v_1},$$

so folgt durch einfache korr. Add. sofort

$$\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Hat man

$$(5)\qquad \frac{u+v}{u-v} = -\frac{u_1+v_1}{u_1-v_1},$$

so hat man

$$\frac{u+v}{u-v} = \frac{v_1+u_1}{v_1-u_1}, \text{ also } \frac{u}{v} = \frac{v_1}{u_1}.$$

Hat man daher

$$(6)\qquad \left(\frac{u+v}{u-v}\right)^2 = \left(\frac{u_1+v_1}{u_1-v_1}\right)^2,$$

so hat man zunächst

$$\frac{u+v}{u-v} = \pm\frac{u_1+v_1}{u_1-v_1}, \text{ d. h.}$$

$$1)\ \frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} \qquad 2)\ \frac{u}{v} = \frac{v_1}{u_1}.$$

Hat man die Quotientengleichung

$$(7)\qquad \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{A}{B},$$

so kann man aus dieser mittelst korr. Add. sofort hinschreiben

$$(8)\qquad \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{A+2B}{A-2B}}.$$

Man hat nämlich in (7) die Nenner mit 2 zu multipliciren. Dann giebt die einfache korr. Add.

$$\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2-2xy} = \frac{A+2B}{A-2B}.$$

Zieht man beiderseits die Wurzel, so erscheint die Gleichung (8). Wendet man auf (8) noch einmal das Verfahren an, so erhält man

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{A+2B}+\sqrt{A-2B}}{\sqrt{A+2B}-\sqrt{A-2B}}.$$

Daher ist zu merken:

2. Ist als Quotient die Summe der Quadrate durch das Produkt zweier Größen gegeben, so kann man durch korr. Add. auch sofort als Quotienten die Summe durch die Differenz, wie auch die eine Größe durch die andere hinschreiben.

Ist die angegebene Quotientengleichung eine algebraische Bestimmungsgleichung, so kann man aus derselben durch korr. Add. beliebig viele andere Quotientengleichungen hinschreiben, welche dieselbe Lösung haben.

Ist z. B. die gegebene Gleichung

$$1)\quad \frac{x}{a} = \frac{b}{x},$$

so kann man durch korr. Add. sofort bilden:

$$1.\ \frac{mx + a}{px - a} = \frac{bm + x}{bp - x} \qquad 2.\ \frac{mx + an}{px + aq} = \frac{bm + nx}{bp + qx}$$

$$3.\ \frac{x - am}{a - nx} = \frac{b - mx}{x - bn} \qquad 4.\ \frac{3x - 2a}{3a - 2x} = \frac{3b - 2x}{3x - 2b} \text{ etc.}$$

Alle Gleichungen haben dieselbe Lösung

$$x = \sqrt{ab}.$$

Ist die gegebene Gleichung

$$2)\quad \frac{x + a}{b} = \frac{b}{x - a},$$

so kann durch korr. Add. sofort bilden:

$$1.\ \frac{(x+a)m + bn}{(x+a)p + bq} = \frac{bm + (x-a)n}{bp + (x-a)q} \quad 2.\ \frac{(x+a)m + b}{(x+a)n + b} = \frac{x - a + bm}{x - a + bn}$$

$$3.\ \frac{x + a + 5b}{x + a + 3b} = \frac{5(x-a) + b}{3(x-a) + b} \quad 4.\ \frac{x + a + b}{x + a - b} = \frac{b - a + x}{b + a - x} \text{ etc.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b. Der Korrespondenzsatz (AG. I. 19), abgekürzt KS. Hat man zwei gleiche Quotienten wie in (1):

$$(9)\quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

so hat man auch stets

$$(10)\quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A \pm C}{B \pm D}.$$

Setzt man den Wert der in (9) gegebenen Quotienten $= z$, so ist $A = Bz$, $C = Dz$, und der Wert des dritten Quotienten in (10) ist ebenfalls $= z$. Daher der Satz:

3. Hat man zwei gleiche Quotienten, so kann man einen dritten gleichwertigen Quotienten finden, wenn man Zähler und Zähler, und Nenner und Nenner addirt (oder von einander subtrahirt). Die Summe (bzw. Differenz) der Zähler giebt den Zähler, die Summe (Differenz) der Nenner giebt den Nenner des neuen Quotienten.

So ist

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2+4}{3+6} = \frac{6}{9} \text{ u. s. w.}$$

Darnach kann man aus (9) weiter bilden:

$$(11) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{Am}{Bm} = \frac{Cn}{Dn} = \frac{Am+Cn}{Bm+Dn}$$

$$(12) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{Ap}{Bp} = \frac{Cq}{Dq} = \frac{Ap+Cq}{Bp+Dq}.$$

Man kann daher aus der Gleichung (9) auch sofort hinschreiben

$$(13) \quad \frac{Am+Cn}{Bm+Dn} = \frac{Ap+Cq}{Bp+Dq}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung, wenn die Gleichung (9) gegeben ist, folgt auf dem oben angegebenen Wege auch leicht direkt ohne die Gleichungen (11) und (12). Mittelst der Gleichungen (11) und (12) sollte nur gezeigt werden, dafs die Gleichung (13) stattfinden mufs, wenn die Gleichung (10) gilt.

Auch in (13) sind die Faktoren m, n, p, q gänzlich willkürlich. Die Quotienten in (13) sind gleichwertig mit denen in (9). Sie sollen in Bezug auf die gegebenen Quotienten in (9) die allgemeinen Quotienten heifsen.

Nach (11) und nach (12) gilt daher der Satz, welcher im Folgenden der Korrespondenzsatz heist:

4. Hat man zwei gleiche Quotienten, so kann man aus denselben beliebig viele unter einander und mit den gegebenen gleichwertige Quotienten bilden, indem man die Quotienten bezw. mit m und n erweitert und Zähler und Zähler, wie Nenner und Nenner addirt, oder indem man in den allgemeinen Quotienten für m und n (oder p und q) beliebige Zahlen setzt.

Nach (13) mufs ferner auch der Satz gelten:

5. Hat man eine Quotientengleichung (9), so kann man aus derselben beliebig viele andere bilden, indem man zwei allgemeine Quotienten einander gleich und für m, n, p und q ganz beliebige Zahlen setzt.

Denkt man, der Wert des Quotienten in (9) sei gleich X, so hat man auch speciell

$$(14)\quad X = \frac{A \pm C}{B \pm D} = \frac{A + 2C}{B + 2D} = \frac{3A - C}{3B - D} = \frac{4A + 5C}{4B + 5D} \text{ etc.}$$

Man mufs, um Zähler und Nenner eines neuen Quotienten zu bilden, mit den Nennern die Kombination machen, welche der mit den Zählern vorgenommenen korrespondirt. Wegen seiner vielfachen Anwendung im Folgenden mufste der Satz einen besonderen Namen haben. Der Name Korrespondenzsatz wird nach dem Obigen gerechtfertigt sein. Der eigentliche Korrespondenzsatz ist in dem 4. Satz enthalten. Der 3. Satz ist nur ein specieller Fall, der 5. Satz nur eine Anwendung des Korrespondenzsatzes.

Speciell werden im Folgenden auch die Redewendungen gebraucht werden:

den Korrespondenzsatz mit Addition anwenden, wenn man bildet

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A + C}{B + D},$$

und den Korrespondenzsatz mit Subtraktion anwenden, wenn man bildet

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A - C}{B - D}.$$

Der Korrespondenzsatz ist von dem Satz der korrespondirenden Addition nur in seiner Form, nicht in seinem Wesen verschieden. Aus (9) hat man

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

und hieraus durch korr. Add.

$$\frac{Am + Cn}{Ap + Cq} = \frac{Bm + Dn}{Bp + Dq},$$

d. h. eine Gleichung, welche von der Gleichung (13) nur der Form nach verschieden ist. Dennoch sind beide Verfahrungsarten schlechterdings auseinander zu halten. Der Grund ist:

6. Die nach dem Korrespondenzsatz gebildeten neuen Quotienten sind den ursprünglichen stets gleichwertig, die durch korrespondirende Addition nie.

So ist nach (9) und (13)

$$\frac{Am + Cn}{Bm + Dn} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Aber nach (1) und (2) ist, wenn nicht $n = 0$, $p = 0$ und zugleich $q = m$ ist, stets

$$\frac{Am + Bn}{Ap + Bq} \gtrless \frac{A}{B}, \quad \frac{Cm + Dn}{Cp + Dq} \gtrless \frac{C}{D} \left(\text{oder } \frac{A}{B}\right).$$

Nach dem KS. hat man aus (9) auch:

$$(15) \quad \frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2} = \left(\frac{A \pm C}{B \pm D}\right)^2 = \frac{A^2 \pm C^2}{B^2 \pm D^2} \text{ u. s. w.}$$

Oder allgemeiner:

$$(16) \quad \frac{A^2}{B^2} = \frac{C^2}{D^2} = \left(\frac{Am + Cn}{Bm + Dn}\right)^2 = \frac{pA^2 + qC^2}{pB^2 + qD^2} \text{ u. s. w.}$$

Nach dem KS. hat man aus (9) auch:

$$(17) \quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{C}{D}} = \sqrt{\frac{A \pm C}{B \pm D}} = \frac{\sqrt{A} \pm \sqrt{C}}{\sqrt{B} \pm \sqrt{D}} \text{ u. s. w.}$$

Oder allgemeiner:

$$(18) \quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{C}{D}} = \sqrt{\frac{Am + Cn}{Bm + Dn}} = \frac{m\sqrt{A} + n\sqrt{C}}{m\sqrt{B} + n\sqrt{D}} \text{ u. s. w.}$$

Man kann demnach aus der Gleichung (9) auch sofort hinschreiben:

$$(19) \quad \frac{mA^2 + nC^2}{mB^2 + nD^2} = \left(\frac{pA + qC}{pB + qD}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

$$(20) \quad \frac{m\sqrt{A} + n\sqrt{C}}{m\sqrt{B} + n\sqrt{D}} = \sqrt{\frac{pA + qC}{pB + qD}} \text{ u. s. w.}$$

Mit Hülfe des KS. kann man aus einer Quotientengleichung beliebig viele von ähnlicher Form bilden. Ist z. B. als Quotientengleichung

$$(21) \quad \frac{x}{b} = \frac{a}{x}$$

gegeben, so hat man auch

1. $\frac{mx + an}{nx + bm} = \frac{px + aq}{qx + bp}$ **2.** $\frac{mx + a}{mb + x} = \frac{x + na}{b + nx}$

3. $\frac{3x + 5a}{3b + 5x} = \frac{4x - 7a}{4b - 7x}$ **4.** $\frac{a}{x} = \frac{3x + 5a + am}{3b + 5x + mx}$ u.s.w.

L. $x = \sqrt{ab}$.

Alle diese Gleichungen haben dieselbe Lösung, welche die Gleichung (21) hat, von der wir ausgegangen sind.

Aus der Gleichung (9) gelangt man zu andern Gleichungen, wenn man einen Faktor aussondert. Man hat aus (9) einerseits, indem man $\frac{A}{D}$ aussondert und für die bleibenden Quotienten nach dem KS. den allgemeinen Quotienten sucht:

$$(22) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A}{D} \left| \frac{D}{B} = \frac{C}{A} \right| = \frac{A}{D} \cdot \frac{Dp + Cq}{Bp + Aq}.$$

Andererseits hat man aus (9) direkt:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{Am + Cn}{Bm + Dn}.$$

Daher die Gleichung

$$(22_1) \quad \frac{Am + Cn}{Bm + Dn} = \frac{A}{D} \cdot \frac{Dp + Cq}{Bp + Aq}.$$

Aus der Gleichung (21) kann man darnach bilden:

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{x} = \frac{a}{b} \left(\frac{x}{a} = \frac{b}{x} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{px + bq}{qx + ap}$$

und hat darnach als transformirte Gleichung

$$\frac{mx + an}{nx + bm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{px + bq}{qx + ap}$$

L. $x = \sqrt{ab}$.

c. Auflösung der symmetrischen Gleichungen des vierten Grades (AG. II. 233 und 236).

Bei den hier vorkommenden Erörterungen sind die homogenen symmetrischen Gleichungen von der Form

$$(23) \quad \frac{mx^4 + nx^3y + px^2y^2 + nxy^3 + mx^4}{m_1x^4 + n_1x^3y + p_1x^2y^2 + n_1xy^3 + m_1y^4} = \frac{a}{b}$$

besonders wichtig (AG. II. 233). Aus einer solchen Gleichung lässt sich nur der Quotient der Gröfsen x und y bestimmen, oder, worauf es hier zunächst ankommt, der Quotient von $x + y$ durch $x - y$. Dieser ist überall mit t bezeichnet, so dafs

$$(24) \quad t = \frac{x + y}{x - y}$$

ist. Dies t hat also stets Bezug auf eine symmetrische Gleichung des vierten Grades von der Form (23).

Die Auflösung der Gleichung (23) geschieht am einfachsten dadurch, dafs man zunächst $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ oder besser $\frac{x^2+y^2}{xy}$ bestimmt. Diese Gröfse ist im Folgenden stets mit u bezeichnet, so dafs

$$(25) \quad u = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

ist (AG. II. 233). Aus (23) ergiebt sich als Gleichung für u

$$\frac{mu^2 + nu + p - 2}{m_1 u^2 + n_1 u + p_1 - 2} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus kann man u bestimmen, und daher nach (7) und (8) in a. durch korr. Add. auch t. Die Auflösung einer symmetrischen Gleichung des vierten Grades ist darnach stets von der Auflösung einer quadratischen Gleichung für u abhängig. Die Auflösung dieser Gleichung führt stets auf eine Quadratwurzel. Diese Quadratwurzel ist im Folgenden stets mit r bezeichnet.

Die weitere Behandlung der allgemeinen Gleichung ist umständlich und zwecklos. Was hier zu sagen ist, läfst sich besser an die Auflösung einer speciellen Gleichung anknüpfen. Es möge daher statt der allgemeinen Gleichung in (23) die specielle Gleichung

$$(26) \quad \frac{(3x^2 - 2xy + 3y^2)(x+y)^2}{4(x^2+y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}$$

gegeben sein. Dann erhält man, indem man links jeden Faktor durch xy dividirt, wegen (25) für u die Gleichung

$$\frac{(3u-2)(u+2)}{4u(u-2)} = \frac{a}{b}.$$

Diese liefert

$$u = \frac{2(2a+b)+4r}{4a-3b} = \frac{2b}{2a+b-2r},$$

$$(27) \quad r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Man hat also nach (25)

$$\frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{2a+b+2r}{4a-3b} = \frac{b}{2a+b-2r}.$$

Hieraus nach (7) und (8) und wegen (24)

$$(28) \quad t = \sqrt{\frac{3a-b+r}{2b-a+r}} = \sqrt{\frac{a+b-r}{r-a}}.$$

Aus (28) hat man weiter nach dem KS. einfach durch Addition und Subtraktion

$$(29)\qquad t=\sqrt{\frac{2a}{b-a+r}}=\sqrt{\frac{a-b+r}{b}}\,.$$

Man kann auch t direkt suchen, ohne vorher erst u zu bestimmen. Dann kommt man zuerst auf die Darstellungen in (29). Man hat nach (24)

$$\frac{x}{y}=\frac{t+1}{t-1}\,,\text{ d. h.}$$

$$x=\lambda(t+1),\quad y=\lambda(t-1).$$

Setzt man dies in (26), so hebt sich λ fort und man erhält

$$\frac{(t^2+2)\,t^2}{2(t^2+1)}=\frac{a}{b}\,.$$

Hieraus ergiebt sich t, wie in (29). In der Regel wird man jedoch schneller zum Ziele kommen, wenn man erst u bestimmt.

Aus (29) erhält man nach dem KS. (s. Eb.) als allgemeine Darstellung von t

$$(30)\qquad t=\sqrt{\frac{2am+(a-b+r)n}{(b-a+r)m+bn}}\ \text{(vgl. AG. II. 233d).}$$

Da m und n beliebig sind, so ist die Zahl der Darstellungen für t von der Form (28) und (29) endlos. Aus der allgemeinen Darstellung lassen sich alle übrigen ableiten. Setzt man in (30) für m und n bezw. 1) $1, 1$; 2) $1, -1$; 3) $1, 0$; 4) $0, 1$, so erhält man die in (28) und (29) angegebenen Darstellungen.

Aus irgend welchen zwei Darstellungen von t kann man übrigens die andern ableiten. So hat man aus (28) nach dem KS.

$$t=\sqrt{\frac{(3a-b+r)p+(a+b-r)q}{(2b-a+r)p+(r-a)q}}\,.$$

Setzt man für p und q bezw. 1) $1, 0$; 2) $0, 1$; 3) $1, 1$; 4) $1, -1$; 5) $m+n$, $m-n$, so erhält man die Darstellungen von t in (28), (29) und (30).

Jede Darstellung von t hat ihre Eigentümlichkeit. Aus der ersten Darstellung in (28) hat man

$$(31)\quad \left|\begin{aligned} x &= \lambda(\sqrt{3a-b+r}+\sqrt{2b-a+r}) \\ y &= \lambda(\sqrt{3a-b+r}-\sqrt{2b-a+r}) \end{aligned}\right|,$$

wo λ ein noch zu bestimmender Proportionalitätsfaktor ist (AG. II. 233d). Ist nun ausser der Gleichung (26) zur Bestimmung von x und y noch die Gleichung

$$xy = c$$

gegeben, so erhält man durch die Substitution von (31)

$$\lambda^2(4a-3b) = c.$$

Die Wurzelgröfse r verschwindet bei der Bestimmung von λ, wenn man die erste Darstellung von t in (28) benutzt. Daher ist diese Darstellung die von t mit dem Index xy, also t_{xy} genannt.

Hätte man als zweite Gleichung für x und y

$$x^2 + y^2 = c,$$

so müfste man die zweite Darstellung von t in (28) wählen, wenn bei der Bestimmung von λ das r fortfallen sollte. Daher ist diese Darstellung die von t mit dem Index x^2+y^2, also $t_{x^2+y^2}$ genannt. Aus ähnlichen Gründen sind die Darstellungen von t in (29) mit t_{x+y} und t_{x-y} bezeichnet. Eigentlich hätten sie mit $t_{(x+y)^2}$ und $t_{(x-y)^2}$ bezeichnet werden sollen, doch kann hier kein Mifsverständnis eintreten.

Allgemein wird man in (30) m und n so annehmen können, dafs bei der Bestimmung von λ mittelst der Gleichung

$$(31_1)\quad \alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2 = c$$

r herausfällt. Dann würde diese Darstellung die von t mit dem Index $\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2$ sein. Man hat, analog den Gleichungen in (31), nach (30) in (31_1) zu setzen:

$$x = \lambda\left(\sqrt{2am+(a-b+r)n}+\sqrt{(b-a+r)m+bn}\right)$$
$$y = \lambda\left(\sqrt{2am+(a-b+r)n}-\sqrt{(b-a+r)m+bn}\right),$$

das giebt, wenn r fortfallen soll,

$$2\alpha(n+m)+\beta(n-m) = 0, \text{ d. h.}$$
$$m = \beta + 2\alpha, \qquad n = \beta - 2\alpha.$$

Darnach erhält man aus (30)

$$(32)\quad t_{\alpha x^2+\beta xy+\alpha y^2}=\sqrt{\frac{2a(\beta+2\alpha)+(a-b+r)(\beta-2\alpha)}{(b-a+r)(\beta+2\alpha)+b(\beta-2\alpha)}}\,.$$

Aus (32) mufs man, rückwärts schliefsend, die Darstellungen von t mit den Indices $x+y$, $x-y$, xy, x^2+y^2 erhalten, wenn man für α und β bezw. 1) 1,2; 2) 1,—2; 3) 0,1; 4) 1,0 setzt. Man hat darnach, mit den obigen Angaben übereinstimmend:

$$(33)\quad \begin{array}{ll} 1.\ t_{x+y}=\sqrt{\dfrac{2a}{b-a+r}} & 2.\ t_{x-y}=\sqrt{\dfrac{a-b+r}{b}} \\ 3.\ t_{xy}=\sqrt{\dfrac{3a-b+r}{2b-a+r}} & 4.\ t_{x^2+y^2}=\sqrt{\dfrac{a+b-r}{r-a}}\,. \end{array}$$

Hier ist zu merken:

t_{x+y} hat kein r im Zähler,

t_{x-y} hat kein r im Nenner,

t_{xy} hat r im Zähler und Nenner gleichmäfsig,

$t_{x^2+y^2}$ hat r im Zähler und Nenner mit entgegengesetzten Zeichen.

Allgemein gilt die Darstellung (32). Setzt man der Kürze halber

$$(34)\quad t_{x+y}=\sqrt{\frac{A}{B}}\,,\qquad t_{x-y}=\sqrt{\frac{C}{D}}\,,$$

so mufs allgemein sein

$$(35)\quad t_{\alpha x^2+\beta xy+\alpha y_2}=\sqrt{\frac{A(\beta+2\alpha)+C(\beta-2\alpha)}{B(\beta+2\alpha)+D(\beta-2\alpha)}}\,.$$

Diese Formel giebt an, wie man aus den Darstellungen von t_{x+y} und t_{x-y} die Darstellung von t mit einem vorher bestimmten Index findet. Hier ist vorausgesetzt, dafs r in den Darstellungen 1. und 2. dieselben Zeichen und dieselben Koefficienten hat. Ist das nicht der Fall, so mufs der eine Radikand in (34) erst in der Art erweitert werden, dafs diese Bedingungen stattfinden.

Nach (35) oder (32) hat man für den ersten Faktor im Zähler der gegebenen Gleichung (26)

$$5.\quad t_{3x^2-2xy+3y^2}=\sqrt{\frac{2(r-b)}{a+b-r}}\,,$$

da $\alpha=3$, $\beta=-2$, also $\beta+2\alpha=4$, $\beta-2\alpha=-8$ ist.

Alle Darstellungen von t sind selbstverständlich einander gleich, nur in der Form verschieden. Hätte man für a und b reine Zahlen und r berechnet, so würden die Darstellungen auch in der Form gleich sein.

Aus den oben angeführten Darstellungen von t kann man nach dem in (22) angewendeten Verfahren noch Darstellungen von anderer Form ableiten. Man erhält nach (22) aus der 1. und 2. Darstellung von t in (33) ganz allgemein

$$(36)\qquad t=\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{2bp+(a-b+r)q}{(b-a+r)p+aq}}\,.$$

Setzt man hierin für p und q bezw. 1) $-1,2$; 2) $1,2$; 3) $1,1$, so erhält man die weiteren Darstellungen von t:

$$6.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{2(a-2b+r)}{3a-b-r}}\quad 7.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{2(a+r)}{a+b+r}}\quad 8.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{a+b+r}{b+r}}\,.$$

Diese Darstellungen von t kann man, wenn auch etwas umständlich, doch auch direkt, ohne die allgemeine Darstellung in (36), aus den Darstellungen in (33) ableiten. Man mufs das r, welches eine Wurzelgröfse ist, nach der bekannten Methode aus dem Nenner in den Zähler und aus dem Zähler in den Nenner bringen. Man hat z. B. den Radikanden der 3. Darstellung von t erstens mit $a-2b+r$, zweitens mit $3a-b-r$ zu erweitern. Man erhält so:

$$(37)\qquad t=\sqrt{\frac{(3a-b)^2-r^2}{r^2-(2b-a)^2}\cdot\frac{a-2b+r}{3a-b-r}}\,.$$

Nun ist nach (27)

$$(3a-b)^2-r^2=8a-6ab=2a(4a-3b)$$
$$r^2-(2b-a)^2=4ab-3b^2=b(4a-3b).$$

Daher geht (37) über in die 6. Darstellung. — Ebenso kann man die 7. und 8. Darstellung bezw. aus der 4. und 5. Darstellung ableiten.

Alle bisherigen Darstellungen von t sind durch Quadratwurzeln ausgedrückt. Multiplicirt man zwei solche Darstellungen mit einander und zieht die Quadratwurzel, so mufs man Darstellungen von t erhalten, welche durch Wurzeln vierten Grades ausgedrückt sind. So erhält man 1) aus

4. und 5., 2) aus 1. und 2., 3) aus 7. und 8. die folgenden:

$$9.\ \sqrt[4]{\frac{2(r-b)}{r-a}}\qquad 10.\ \sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\frac{2(a-b+r)}{b-a+r}}\qquad 11.\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{2(a+r)}{b+r}}\,.$$

Diese drei Darstellungen sollen kurz mit t_4 bezeichnet werden (AG. II. 236). Nur die erste dieser Darstellungen hat einen ähnlich geformten Radikanden, wie die Darstellungen 1—5. Eine andere Darstellung für t von dieser einfachen Form mit der Wurzel vierten Grades giebt es nicht.

Alle Darstellungen von t_4 haben die Eigentümlichkeit, dafs die Produkte aus Zähler und Nenner der Radikanden Quadrate sind. So ist:

$$2(r-b)\cdot(r-a)=(a+b-r)^2$$
$$2a(a-b+r)\cdot b(b-a+r)=4a^2b^2$$
$$2a^2(a+r)\cdot b^2(b+r)=a^2b^2\cdot(a+b+r)^2.$$

Die erste Darstellung von t_4 wird stets gefunden, wenn man die beiden Darstellungen von t mit einander multiplicirt, deren Indices die quadratischen Faktoren des Zählers oder des Nenners der gegebenen Gleichung sind.

Für die gegebene Gleichung (26) sind die quadratischen Faktoren des Zählers $3x^2-2xy+3y^2$ und $(x+y)^2$. Die 5. und die 1. Darstellung von t sind diejenigen, welche zu diesen Faktoren gehören. Die Multiplikation derselben giebt

$$t=\sqrt[4]{\frac{2(r-b)}{a+b-r}\cdot\frac{2a}{b-a+r}}=\sqrt[4]{\frac{2(r-b)}{r-a}}\,;$$

denn nach (27) ist $(a+b-r)(b-a+r)=2a(r-a)$. — Zu demselben Resultate würde man durch Multiplikation der 2. und 4. Darstellung gelangen.

Hat der Zähler links in der gegebenen Gleichung (23) den Faktor $(x+y)^2$, der Nenner den Faktor $(x-y)^2$, so findet man die Darstellung von t_4 stets sehr einfach durch Multiplikation der Darstellungen von t, welche als Indices die andern quadratischen Faktoren haben.

In der Gleichung (26) hat der Zähler links den Faktor $(x+y)^2$, der Nenner den Faktor $(x-y)^2$. Die andern quadratischen Faktoren sind $3x^2 - 2xy + 3y^3$ und $x^2 + y^2$. Die Darstellungen von t, welche diesen Faktoren entsprechen, sind oben als die 5. und 4. angeführt. Multiplicirt man diese mit einander, so erhält man die angegebene Darstellung von t_4 direkt, da sich der Faktor $a + b - r$ forthebt.

I. $AC = B^2$.

8. $(a + 5b + x)(5a + b + x) = 3(a + b + x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

9. $(a + 5b + x)(5a + b + 3x) = 4(a + 2b + x)^2$

L. $x = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}$.

10. $(9a - 7b + 3x)(9b - 7a + 3x) = (3a + 3b + x)^2$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

11. $(a + 17b + x)(17a + b + x) = 9(a + b + x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

a. Diese Gleichungen haben die Form

$$(1) \quad AC = B^2,$$

oder lassen sich doch leicht auf diese Form bringen. Es steht links ein Produkt, rechts ein Quadrat. In 8 hätte man die Gleichung genau genommen noch mit 3 multipliciren müssen, um die angegebene Form zu erhalten.

Die erste Frage, welche uns hier entgegentritt, ist:

Lassen sich Gleichungen von der oben angegebenen Form direkt aufstellen?

Das ist, wenn nicht noch besondere Bedingungen gestellt werden, sehr einfach. Man wählt die Faktoren links beliebig und die Gröfse, deren Quadrat rechts steht, so, dafs bei der Entwickelung, da die Gleichung rein quadratisch sein soll, die Glieder mit x fortfallen. Hat man daher für eine zu bildende Gleichung

$$(\alpha a + \beta b + \gamma x)(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x) = (\mu a + \nu b + \varrho x)^2$$

die links stehenden Koefficienten α, β u. s. w. beliebig gewählt, so sind μ, ν, ϱ so zu bestimmen, dafs sie den Gleichungen

$$2\mu\varrho = \alpha\gamma_1 + \alpha_1\gamma$$
$$2\nu\varrho = \beta\gamma_1 + \beta_1\gamma$$

genügen. Hat man z. B. links das Produkt

$$(3a + 5b + 2x)(4a - 3b + x)$$

gewählt, so sind die Glieder mit der ersten Potenz von x:

$$11ax - bx = (11a - b)x.$$

Es mufs daher rechts bei der Entwickelung des Quadrats die Gröfse $(11a - b)x$ als doppeltes Produkt erscheinen und mithin rechts stehen

$$\left(\frac{11a - b}{2} + x\right)^2 \text{ oder } \left(11a - b + \frac{1}{2}x\right)^2.$$

Wählt man die erste Gröfse, so erhält man die Gleichung

1. $(3a + 5b + 2x)(4a - 3b + x) = \frac{1}{4}(11a - b + 2x)^2$

   L. $x = \frac{1}{2}\sqrt{73a^2 - 66ab + 61b^2}.$

In derselben Weise erhält man

2. $(a - 7b + x)(3a - b - x) = (a + 3b + x)^2$

   L. $x = \sqrt{a^2 - 14ab - b^2}.$

Will man gröfsere Zahlen vermeiden, so mufs der Faktor von x, der links nach der Entwickelung des Produkts entsteht, durch 2 teilbar sein. Soll das Resultat in Bezug auf a und b symmetrisch sein, so wählt man links am besten ein nach a und b symmetrisches Produkt, so dafs auch rechts das Quadrat nach a und b symmetrisch sein mufs. In dieser Weise erhält man z. B. weiter:

3. $(5a - 3b + 2x)(5b - 3a + 2x) = (2a + 2b + x)^2$

   L. $x = \sqrt{\frac{1}{3}(19a^2 - 26ab + 19b^2)}.$

4. $(a + 3b + x)(3a + b + x) = 2(a + b + x)^2$

   L. $x = \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}.$

5. $(3a + 7b + 2x)(7a + 3b + 2x) = 5(a + b + 2x)^2$

   L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}.$

In den beiden letzten Gleichungen mufs man, genau genommen, beiderseits noch bezw. mit 2 und 5 multipliciren, wenn die Gleichungen die verlangte Form haben sollen.

b. Aus den obigen Beispielen ersieht man, dafs man durch blofses Probiren nur zufällig zu einer Gleichung gelangt, welche bei der gewünschten Form eine zierliche Lösung liefert. Die Gleichungen 8—11 sind nicht durch Zufall oder Probiren gefunden, sondern durch einfache Schlüsse aus andern Gleichungen abgeleitet. Die zweite Frage ist daher:

> Welches ist der Schlüssel für die Aufstellung dieser Gleichungen?

Die Gleichungen sind abgeleitet aus homogenen symmetrischen Gleichungen des vierten Grades mit zwei Unbekannten.

Aus jeder symmetrischen Gleichung des vierten Grades läfst sich mindestens eine Gleichung von der hier behandelten Form ableiten.

Entwickelt man aus der symmetrischen Gleichung des vierten Grades

$$(2) \quad \frac{2xy\,(x+y)^2}{(x^2-4xy+y^2)\,(x-y)^2} = \frac{a}{b}\,^{*)}$$

nach den in Ec. und in AG. II. 233 und 236 aufgestellten Methoden die verschiedenen Darstellungen von

$$t = \frac{x+y}{x-y},$$

so erhält man:

$$(3) \quad \sqrt{\frac{5a+b+r}{a+b+r}} = \sqrt{\frac{7a-b-r}{a-3b+r}} = \sqrt{\frac{6a}{a-b+r}} = \sqrt{\frac{b-a+r}{2b}}$$
$$= \sqrt[4]{\frac{3\,(5a+b+r)}{a+5b+r}}, \quad r = \sqrt{a^2+10ab+b^2}.$$

Die letzte Darstellung von t ist in den Algebraischen

---

*) Das x der symmetrischen Gleichung des vierten Grades ist nicht zu verwechseln mit dem x der hier behandelten und vorkommenden quadratischen Gleichungen. Das sind gänzlich verschiedene Gröfsen. Das x in den quadratischen Gleichungen ist identisch mit dem r der Gleichungen des vierten Grades.

Gleichungen [s. II. 236] mit t_4 bezeichnet. Nach Ec. und nach [II. 236] mufs das Produkt aus dem Zähler und dem Nenner des Radikanden von t_4 — und ein solches t_4 läfst sich nach [236] von jeder symmetrischen Gleichung des vierten Grades bilden — ein vollständiges Quadrat sein, hier also

$$3(a + 5b + r)(5a + b + r).$$

Dies Quadrat ist nach [236] zu suchen, dem Produkte gleich und x statt r zu setzen, so erhält man eine Gleichung von der verlangten Form. — Das Quadrat des angegebenen Produktes ergiebt sich dann von selbst, wenn der Zähler oder der Nenner links in der symmetrischen Gleichung des vierten Grades den Faktor $(x + y)^2$ oder $(x - y)^2$ hat, wie es in der Gleichung (2) der Fall ist. Dann hat man die Darstellung von t_4 nur gleich der Darstellung von dem t zu setzen, welches den Faktor von $(x + y)^2$ oder den von $(x - y)^2$ zum Index hat. Hier in (2) hat $(x + y)^2$ den Faktor xy, $(x - y)^2$ den Faktor $x^2 - 4xy + y^2$. Man hat daher zu bilden:

$$t_4 = t_{xy}, \text{ oder}$$

$$t_4 = t_{x^2 - 4xy + y^2}.$$

Die erste Darstellung in (3) ist die für t_{xy}, die letzte die für t_4. Setzt man diese einander gleich und x statt r, so erhält man nach Fortschaffung der Wurzeln

$$3(a + 5b + x)(5a + b + x) = 9(a + b + x)^2,$$

d. h. die Gleichung 8.

Sucht man für (2) nach Ec. die Darstellung von $t_{x^2 - 4xy + y^2}$, so findet man

$$t_{x^2 - 4xy + y^2} = \sqrt{\frac{3(a + b + r)}{a + 5b + r}}.$$

Setzt man diese Darstellung gleich der von t_4 und : statt r, so erhält man die angegebene Gleichung ebenfall

Die Gleichung 9 ist direkt aufgestellt worden, in d Weise, wie oben in a. angegeben ist. Man kann sie jedo auch leicht aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grad

$$(4) \quad \frac{(x^2 - 4xy + y^2)^2 + 44x^2y^2}{(x^2 - 6xy + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}$$

ableiten. Man erhält hier nach Ec. für t die Formeln:

$$\sqrt{\frac{7b-a+r}{6b}} = \sqrt{\frac{4a-10b}{a-7b+r}} = \sqrt{\frac{2a+4b+2r}{a+5b+r}}$$

(5)

$$= \sqrt[4]{\frac{5a+b+3r}{a+5b+r}}, \quad r = \sqrt{(a-b)(a+11b)}.$$

Will man aus diesen Darstellungen von t eine Gleichung von der angegebenen Form bilden, so mufs man wegen des Radikanden von t_4 das Produkt $(a+5b+r)(5a+b+3r)$ durch ein Quadrat ausdrücken. Dies geschieht nach den obigen Erörterungen am einfachsten, wenn man

$$t_4 = t_{x^2-6xy+y^2}$$

setzt. Die 3. Darstellung in (5) ist die für t mit dem Index $x^2 - 6xy + y^2$. Sie ist nach (32) in Ec. gefunden. Man hat daher, indem man x statt r setzt, die Gleichung

$$\frac{5a+b+3x}{a+5b+x} = \left(\frac{2a+4b+2x}{a+5b+x}\right)^2, \text{ d. h.}$$

$$(a+5b+x)(5a+b+3x) = 4(a+2b+x)^2$$

L. $x = \sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

Die Gleichung 10 folgt aus der Gleichsetzung der 10. und 13. Darstellung von t in [II. 305], wenn man x statt r setzt. In derselben Weise würde aus der 5. und 11. Darstellung dort folgen

$$(7a-9b+3x)(7b-9a+3x) = (3a+3b-x)^2$$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Die Gleichung 11 ergiebt sich in derselben Weise aus der Gleichsetzung der 9. und 10. Darstellung von t in [II. 298]. — Aus der 5. und 11. Darstellung würde eine ähnliche Gleichung folgen.

c. Es ist in b. gezeigt, dafs und wie man aus jeder symmetrischen Gleichung des 4. Grades eine reine quadratische Gleichung ableiten kann, welche die Form (1) oder die Form der Gleichungen 8—11 hat. Nun kann es aber sehr verschiedene symmetrische Gleichungen des 4. Grades geben, welche auf dasselbe r führen. Den verschiedenen symmetrischen Gleichungen des 4. Grades werden auch verschiedene Darstellungen von t entsprechen, und aus diesen werden sich wieder verschiedene quadratische Gleichungen von der behandelten Form ableiten lassen. Diese müssen dann dieselbe Lösung haben.

Es sei, um dies näher zu erörtern, **erstens** die symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$(\alpha)\quad \frac{3x^2 - 2xy + 3y^2)(x+y)^2}{4(x^2+y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}$$

gegeben. Dann erhält man nach Ec. folgende Darstellungen von t:

$$(6)\quad \begin{aligned} &\sqrt{\frac{3a-b+r}{2b-a+r}} = \sqrt{\frac{a+b-r}{r-a}} = \sqrt{\frac{2a}{b-a+r}} = \sqrt{\frac{a-b+r}{b}} \\ &= \sqrt{\frac{2(r-b)}{a+b-r}} = \sqrt[4]{\frac{2(r-b)}{r-a}},\quad r = \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Die 5. Darstellung ist die für t mit dem Index $3x^2 - 2xy + 3y^2$. Man erhält sie nach (32) in Ec. Aus $t_{x^2+y^2}$ und $t_{3x^2-2xy+3y^2}$, d. h. aus der 2. und 5. Darstellung ergiebt sich t_4 durch Multiplikation. Nach b. oben mufs man, wie aus der Gleichung (α) folgt, die hier in Betracht kommende Gleichung erhalten, wenn man

$$t_4 = t_{3x^2-2xy+3y^2},\ \text{oder}$$
$$t_4 = t_{x^2+y^2}$$

bildet, d. h. wenn man die 6. und die 5. Darstellung, oder die 6. und die 2. Darstellung in (6) einander gleich und x statt r setzt. Das giebt

$$(\beta)\quad 2(x-a)(x-b) = (a+b-x)^2$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Behandelt man **zweitens** die Gleichung

$$(\alpha_1)\quad \frac{x^4 - 7x^2y^2 + y^4}{6xy(x^2+y^2)} = \frac{a}{b}$$

in derselben Weise, so erhält man für t zunächst die Darstellungen

$$(7)\quad \begin{aligned} &\sqrt{\frac{3a+2b+3r}{3a-2b+3r}} = \sqrt{\frac{3b-2a+2r}{3b+2a-2r}} = \sqrt{\frac{12r+13b}{12a+5b}} \\ &= \sqrt{\frac{12a-5b}{12r-13b}} = \sqrt[4]{\frac{5a+12b+13r}{5a-12b+13r}},\quad r = \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Jetzt ist nur noch das Produkt $(5a + 12b + 13r) \cdot (5a - 12b + 13r)$ durch ein Quadrat auszudrücken. Dies Quadrat ist hier, da in der Gleichung (α_1) links weder im Zähler noch im Nenner der Faktor $(x+y)^2$ oder $(x-y)^2$ vorkommt, nicht so leicht zu finden, wie bei den Gleichungen (2), (4) und (α). Hier hat man wegen der Bedeutung von r einerseits:

$$(8) \qquad (3a + 2b + 3r)(3b - 2a + 2r) = b(5a + 12b + 13r),$$

$$(9) \qquad (3a - 2b + 3r)(3b + 2a - 2r) = b(5a - 12b + 13r).$$

Andrerseits hat man wegen $t_{xy} = t_{x^2+y^2}$ auch

$$(10) \qquad (3a + 2b + 3r)(3b + 2a - 2r)$$
$$= (3a - 2b + 3r)(3b - 2a + 2r) = b(13a + 5r).$$

Die Multiplikation von (8) und (9) giebt mit Benutzung von (10), wenn man zugleich x statt r setzt, die Gleichung

$$(\beta_1) \qquad (5a + 12b + 13x)(5a - 12b + 13x) = (13a + 5x)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Einfacher kommt man hier, wie in allen ähnlichen Fällen, direkt zum Ziele. Man entwickelt das oben angegebene Produkt, setzt $a^2 + b^2$ statt r^2 und findet, dafs

$$(5a + 12b + 13r)(5a - 12b + 13r)$$
$$= 194a^2 + 25b^2 + 130ar$$

ist, dies also, da in $130ar$ das doppelte Produkt enthalten sein mufs, nur $(13a + 5r)^2$ sein kann u. s. w.

Behandelt man drittens in derselben Weise die Gleichung

$$(\alpha_2) \qquad \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{2xy(x^2 + y^2)} = \frac{a}{b},$$

so erhält man zunächst für t die Darstellungen:

$$(11) \quad \begin{aligned} &\sqrt{\frac{a + 2b + r}{a - 2b + r}} = \sqrt{\frac{b - 2a + 2r}{2a + b - 2r}} = \sqrt{\frac{4r + 5b}{4a - 3b}} \\ &\sqrt{\frac{4a + 3b}{4r - 5b}} = \sqrt[4]{\frac{5r - 3a + 4b}{5r - 3a - 4b}}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Man erhält hieraus die Gleichung

$$(\beta_2) \qquad (5x - 3a + 4b)(5x - 3a - 4b) = (5a - 3x)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aus den drei verschiedenen symmetrischen Gleichungen des 4. Grades (α), (α_1) und (α_2), welche alle auf dieselbe Quadratwurzel

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

führen, sind, indem man x statt r gesetzt hat, die Gleichungen (β), (β_1) und (β_2) abgeleitet, drei verschiedene quadratische Gleichungen von der Form (1) oder von der Form der Gleichungen 8—11, welche alle dieselbe Lösung

$$(12) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

haben.

Man mufs daher schliefsen: Eine quadratisch Gleichung von der Form (1) oder von der Form de Gleichungen 8—11, welche eine bestimmte Lösun hat, ist nicht die einzige dieser Art, sondern es gieb unzählige, welche alle dieselbe Form und dieselb Lösung haben.

Für die Lösung (12) sind oben in (β), (β_1) und $(\beta_2$ drei Gleichungen aufgestellt; aber es giebt noch unzählig viele andere von derselben Form, welche ebenfalls die angegebene Lösung haben. Auch lassen sich die Gleichungen (β), (β_1) und β_2 auf einander reduciren.

d. Es tritt uns daher die dritte Frage entgegen:

Wie transformirt man eine Gleichung von der Form $AC = B^2$ in eine andere von derselben Form?

Aus der Gleichung (1) hat man

$$(13) \quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

und kann daher nach dem KS (s. Eb.) auch setzen

$$\frac{A}{B} = \frac{Am + Bn}{Bm + Cn}.$$

Hieraus folgt weiter durch korr. Add. nach Ea., indem man die Zähler ungeändert läfst,

$$\frac{A}{Am + Bn} = \frac{Am + Bn}{(Am + Bn)\, m + (Bm + Cn)\, n}, \text{ d. h.}$$

I. $A\,(Am^2 + 2Bmn + Cn^2) = (Am + Bn)^2$.

Diese Gleichung hat dieselbe Form, welche die Gleichung (1) hat, und zugleich dieselbe Lösung, ist also nur eine Umformung der Gleichung (1). Führt man die Multiplikationen aus, so kommt man wieder auf die Gleichung (1); die willkürlichen Faktoren m und n heben sich fort. — In derselben Weise hat man, indem man C ungeändert läſst,

II. $(Ap^2 + 2Bpq + Cq^2)\,C = (Bp + Cq)^2$.

Multiplicirt man die Gleichungen I und II mit einander, beachtet, daſs $AC = B^2$ und daher auch

$$(Am + Bn)(Bp + Cq) = B(Amp + B(np + mq) + Cnq)$$

ist, so erhält man nach Forthebung des Faktors $AC = B^2$ als allgemeinste Transformation der Gleichung (1) die Gleichung

III. $$(Am^2 + 2Bmn + Cn^2)(Ap^2 + 2Bpq + Cq^2) = (Amp + B(np + mq) + Cnq)^2.$$

Man kann diese Gleichung auch direkt, ohne Hülfe der Gleichungen I und II entwickeln. Man hat durch korr. Add. aus (13)

$$(14)\quad \frac{Am + Bn}{Ap + Bq} = \frac{Bm + Cn}{Bp + Cq}.$$

Hieraus kann man, indem man erstens den ersten Quotienten mit m, den zweiten mit n erweitert und den KS. mit Addition anwendet, zweitens den ersten Quotienten mit p, den zweiten mit q erweitert und abermals den KS. mit Addition anwendet, sofort hinschreiben

$$(15)\quad \frac{Am^2 + 2Bmn + Cn^2}{Amp + B(np + mq) + Cnq} = \frac{Amp + B(np + mq) + Cnq}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2}.$$

Diese Gleichung ist von der Gleichung III nicht verschieden.

Die Gleichung III hat dieselbe Form und dieselbe Lösung, wie die Gleichung (1). Sie enthält vier willkürliche Gröſsen: m, n, p und q. Über diese kann man beliebig verfügen, kann sie beliebig annehmen. Entwickelt man, so heben sie sich alle wieder fort, und von der Gleichung III bleibt nichts übrig als die Gleichung (1). Damit ist denn die oben in c. aufgestellte Behauptung bewiesen: Es giebt unzählige Gleichungen, welche von derselben hier behandelten Form sind, und welche alle dieselbe Lösung haben. Zugleich müssen alle Gleichungen, welche sich durch Transformation aus einer Gleichung von der Form 8—11 ableiten lassen, ohne die Form zu ändern, in der Gleichung III enthalten sein, man hat nur die Gröfsen m, n, p und q in geeigneter Weise zu bestimmen.

Es sind oben, um dies an einem Beispiel zu zeigen, in c. bei (β), (β_1) und (β_2) die Gleichungen gefunden worden:

$$(16)\quad \begin{aligned} &1)\ 2(x-a)(x-b) = (a+b-x)^2 \\ &2)\ (5a+12b+13x)(5a-12b+13x) = (13a+5x)^2 \\ &3)\ (5x-3a+4b)(5x-3a-4b) = (5a-3x)^2 \end{aligned}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Für die Gleichung 1) ist nach der Gleichung (1):

$$(17)\quad A = 2x-2a, \quad B = a+b-x, \quad C = x-b.$$

Setzt man diese Werte in III und zugleich 1) $m = 1$, $n = 6$, $p = 5$, $q = 6$; 2) $m = 3$, $n = 2$, $p = -1$, $q = 2$, so erhält man bezw. die Gleichungen 2) und 3).

Die Werte für die willkürlichen Gröfsen sind in solchen Fällen immer leicht zu bestimmen. Soll z. B. die Gleichung 1) mit Hülfe von III in 2) umgeformt werden, so mufs, wie aus der Vergleichung von III und 2) folgt,

$$Amp + B(np+mq) + Cnq = 13a + 5x$$

gesetzt werden, d. h. wegen (17)

$$(2x-2a)\,mp + (a+b-x)(np+mq) + (x-b)\,nq$$
$$= 13a + 5x.$$

Hiernach mufs, wie aus der Vergleichung der Koefficienten von a, b und x folgt, sein:

$$\left|\begin{array}{c} -2mp+np+mq = 13 \\ np+mq-nq = 0 \\ 2mp-np-mq+nq = 5 \end{array}\right|.$$

Hieraus erhält man durch Elimination von p und q für m und n die quadratische Gleichung

$$36m^2 - 36mn + 5n^2 = 0.$$

Diese liefert

$$\frac{m}{n} = \frac{5}{6}, \ \frac{1}{6}.$$

Man würde dieselben Werte für $\frac{p}{q}$ erhalten. Setzt man $m = 1, n = 6$, so mufs $p = 5, q = 6$ sein. Eine vorher bestimmte Transformation ist hier daher stets von der Auflösung einer quadratischen Gleichung abhängig.

Um zu zeigen, wie mannigfaltig die Gleichungen sein können, welche dieselbe hier behandelte Form und dieselbe Lösung haben, möge auf die Gleichung 1) in (16) die Transformationsformel III angewendet werden für folgende einfachen Werte von bzw. m, n, p und q: 1) 1, 1, 1, — 1; 2) 2, 1, 2, — 1; 3) 2, 1, 1, 2; 4) 1, 2, 1, — 2; 5) 2, — 1, 1, — 2; 6) 1, 3, 1, — 3; 7) 3, 1, 3, — 1; 8) 3, 1, 1, 3; 9) 2, 3, 3, 2.

Dann geht III bezw. zunächst über in:

1) $(A + 2B + C)(A - 2B + C) = (A - C)^2$
2) $(4A + 4B + C)(4A - 4B + C) = (4A - C)^2$
3) $(4A + 4B + C)(A + 4B + 4C) = (2A + 5B + 2C)^2$
4) $(A + 4B + 4C)(A - 4B + 4C) = (A - 4C)^2$
5) $(4A - 4B + C)(A - 4B + 4C) = (2A - 5B + 2C)^2$ (18)
6) $(A + 6B + 9C)(A - 6B + 9C) = (A - 9C)^2$
7) $(9A + 6B + C)(9A - 6B + C) = (9A - C)^2$
8) $(9A + 6B + C)(A + 6B + 9C) = (3A + 10B + 3C)^2$
9) $(4A + 12B + 9C)(9A + 12B + 4C) = (6A + 13B + 6C)^2$.

Alle diese Gleichungen sind nur einfache Umformungen der Gleichung (1). Entwickelt man, so kommt man immer nur auf die Gleichung $AC = B^2$.

Setzt man in den Gleichungen (18) für A, B und C die in (17) angegebenen Werte, so erhält man als einfachste Umformungen der Gleichung 1) in (16):

6. $(x + b)(5x - 4a - 3b) = (x - 2a + b)^2$
7. $(5x - 4a + 3b)(13x - 12a - 5b) = (7x - 8a + b)^2$
8. $(5x - 4a + 3b)(2x + 2a) = (x + a + 3b)^2$
9. $(x + a)(5x - 3a - 4b) = (x + a - 2b)^2$
10. $(12a + 5b - 13x)(6a + 8b - 10x) = (9a + 7b - 11x)^2$
11. $(5x + 4a - 3b)(17x - 8a - 15b) = (7x + 2a - 9b)^2$
12. $(13x - 12a + 5b)(25x - 24a - 7b) = (17x - 18a + b)^2$

13. $(13x - 12a + 5b)(5x + 4a - 3b) = (4a + 7b - x)^2$

14. $(5x + 4a + 3b)(10x - 6a + 8b) = (5x + a + 7b)^2$.

Alle 9 Gleichungen haben dieselbe Lösung, wie 1) in (16),

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Für die Gleichung 8, die oben zu Anfang aufgeführt ist, würde, nachdem man, um die Form (1) genau herzustellen, beide Seiten mit 3 multiplicirt hat, sein:

$$(19)\quad \left|\begin{array}{l} A = 3a + 15b + 3x \\ B = 3a + 3b + 3x \\ C = 5a + b + x. \end{array}\right.$$

Benutzt man diese Werte für die ersten 5 Gleichungen in (18), so erhält man als Umformungen der Gleichung 8:

15. $(7a + 11b + 5x)(a + 5b - x) = (x - a + 7b)^2$

16. $(29a + 73b + 25x)(5a + 49b + x) = (7a + 59b + 11x)^2$

17. $(29a + 73b + 25x)(35a + 31b + 19x)$

$$= (31a + 47b + 23x)^2$$

18. $(35a + 31b + 19x)(11a + 7b - 5x) = (17a - 11b + x)^2$

19. $(5a + 49b + x)(11a + 7b - 5x) = (a + 17b - 7x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Um die oben aufgeführte Gleichung 9 zu transformiren, hat man zu setzen:

$$(20)\quad \left|\begin{array}{l} A = a + 5b + x \\ B = 2a + 4b + 2x \\ C = 5a + b + 3x. \end{array}\right.$$

Dann ergeben die ersten 5 Gleichungen in (18) als Transformationen von 9:

20. $(5a + 7b + 4x)(a - b) = (2a - 2b + x)^2$

21. $(17a + 37b + 15x)(a + 5b - x) = (x - a + 19b)^2$

22. $(17a + 37b + 15x)(29a + 25b + 21x)$

$$= 4(11a + 16b + 9x)^2$$

23. $(29a + 25b + 21x)(13a - 7b + 5x) = (19a - b + 11x)^2$

24. $(a + 5b - x)(13a - 7b + 5x) = 4(x - a + 4b)^2$

L. $x = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}$.

Für die oben aufgeführte Gleichung 10 hat man:

$$(21)\quad \left| \begin{array}{l} A = 9a - 7b + 3x \\ B = 3a + 3b + x \\ C = 9b - 7a + 3x. \end{array} \right.$$

Dann geben die ersten 5 Gleichungen in (18) als Umformungen von 10 folgende Gleichungen:

25. $(x + a + b)(x - a - b) = 8(a - b)^2$

26. $(41a - 7b + 19x)(17a - 31b + 11x) = (43a - 37b + 9x)^2$

27. $(41a - 7b + 19x)(41b - 7a + 19x) = (19a + 19b + 17x)^2$

28. $(19x - 7a + 41b)(11x - 31a + 17b) = (9x - 37a + 43b)^2$

29. $(17a - 31b + 11x)(17b - 31a + 11x) = (11a + 11b - 7x)^2$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Zur Transformation der vorne aufgeführten Gleichung **11** hat man zu setzen:

$$(22)\quad \left| \begin{array}{l} A = a + 17b + x \\ B = 3a + 3b + 3x \\ C = 17a + b + x \end{array} \right.$$

und erhält aus den ersten 5 Gleichungen in (18):

30. $(3a + 3b + x)(3a + 3b - x) = 8(a - b)^2$

31. $(33a + 81b + 17x)(9a + 57b - 7x) = (67b - 13a + 3x)^2$

32. $(33a + 81b + 17x)(81a + 33b + 17x)$
$= (51a + 51b + 19x)^2$

33. $(81a + 33b + 17x)(57a + 9b - 7x) = (67a - 13b + 3x)^2$

34. $(9a + 57b - 7x)(57a + 9b - 7x) = (21a + 21b - 11x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Dafs man die hier behandelten Gleichungen auch direkt, ohne Anwendung der oben aufgestellten Formeln, transformiren kann, liegt auf der Hand.

Dies kann erstens mit Hülfe der korr. Add. und des KS. geschehen, wie es in (14) und (15) allgemein für die Gleichung (1) gemacht ist. Man hat statt m, n, p und q nur beliebige, specielle Zahlen zu nehmen. Man mufs zu dem Zwecke die gegebene Gleichung in eine Quotientengleichung verwandeln, wie es für die Gleichung (1) in (13) geschehen ist.

Für die Gleichung 10 z. B.

$$(9a - 7b + 3x)(9b - 7a + 3x) = (3a + 3b + x)^2$$

hat man:

$$(23)\quad \frac{9a - 7b + 3x}{3a + 3b + x} = \frac{3a + 3b + x}{9b - 7a + 3x}.$$

Aus der Gleichung (13) hat man für **beliebige Zahlen**, z. B. für 2, 1, 3, — 1 nach dem KS. die Gleichung

$$\frac{2A + B}{2B + C} = \frac{3A - B}{3B - C}, \text{ also auch}$$

$$\frac{2A + B}{3A - B} = \frac{2B + C}{3B - C}.$$

Auf diese Gleichung kann man das ursprüngliche Verfahren noch einmal anwenden, indem man bildet:

$$\frac{2(2A + B) + (2B + C)}{2(3A - B) + (3B - C)} = \frac{3(2A + B) - (2B + C)}{3(3A - B) - (3B - C)}.$$

In derselben Weise erhält man aus der Gleichung (23) nach und nach:

$$\frac{21a - 11b + 7x}{-a + 15b + 5x} = \frac{24a - 24b + 8x}{16a} = \frac{3a - 3b + x}{2a}$$

$$\frac{21a - 11b + 7x}{3a - 3b + x} = \frac{-a + 15b + 5x}{2a}$$

$$\frac{41a - 7b + 19x}{8a - 6b + 2x} = \frac{64a - 48b + 16x}{7a - 9b + 3x}.$$

Daher die gesuchte Transformation:

35. $(41a - 7b + 19x)(14a - 18b + 6x) = 64(4a - 3b + x)^2$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Statt der hier gewählten Zahlen 2, 1, 3 und — 1 kann man beliebige andere wählen und erhält immer neue Umformungen.

Läfst man einen Faktor ungeändert, so kann man die ganze Umformung in einer Zeile abmachen. So hat man aus (13):

$$(24)\quad \frac{A}{A + B} = \frac{B}{B + C} = \frac{A + B}{A + 2B + C}, \text{ also auch}$$

$$A(A + 2B + C) = (A + B)^2.$$

Die beiden ersten Quotienten sind durch korr. Add. gefunden, der dritte nach dem KS. aus den beiden ersten. Es mufs der Zähler des dritten Quotienten aus den Zählern der beiden ersten Quotienten ebenso gebildet werden, wie der Nenner des ersten Quotienten aus dem Zähler und Nenner des ersten ursprünglichen Quotienten. — In derselben Weise hat man auch:

$$(24_1) \quad \frac{A}{A-B} = \frac{B}{B-C} = \frac{A-B}{A-2B+C}, \text{ d. h.}$$

$$A(A-2B+C) = (A-B)^2.$$

Allgemeiner:

$$(24_2) \quad \frac{A}{Am+Bn} = \frac{B}{Bm+Cn} = \frac{Am+Bn}{Am^2+2Bmn+Cn^2}, \text{ d. h.}$$

$$A(Am^2+2Bmn+Cn^2) = (Am+Bn)^2.$$

Nach (24) kann man aus (23) sofort hinschreiben:

$$\frac{9a-7b+3x}{12a-4b+4x} = \frac{3a+3b+x}{12b-4a+4x} = \frac{12a-4b+4x}{8a+8b+8x}, \text{ d. h.}$$

36. $(9a-7b+3x)(2a+2b+2x) = 4(3a-b+x)^2.$

L. wie in 35.

Oder nach (24_1):

$$\frac{9a-7b+3x}{6a-10b+2x} = \frac{3a+3b+x}{10a-6b-2x} = \frac{6a-10b+2x}{-4a-4b+4x}, \text{ d. h.}$$

37. $(9a-7b+3x)(x-a-b) = (3a-5b+x)^2.$

L. wie in 35.

Aus den Gleichungen 36 und 37 kann man in derselben Weise wieder neue Gleichungen bilden, indem man den ersten und zweiten Faktor vertauscht, um auch den ersten Faktor zu ändern u. s. w.

Ohne Formel kann man zweitens und einfacher auch auf folgende Weise verfahren:

Man multiplicirt die Gleichung (1) mit $4m^2n^2$, wo m und n ganz beliebige Zahlen sind, und zerlegt links das vierfache Produkt in die Differenz zweier Quadrate, vertauscht das zweite und dritte Glied der Gleichung und setzt statt der Differenz der Quadrate wieder das Produkt. — Man hat aus (1)

$$4ACm^2n^2 = 4B^2m^2n^2$$
$$(Am^2 + Cn^2)^2 - (Am^2 - Cn^2)^2 = 4B^2m^2n^2$$
$$(Am^2 + Cn^2)^2 - 4B^2m^2n^2 = (Am^2 - Cn^2)^2$$

IV. $(Am^2 + 2Bmn + Cn^2)(Am^2 - 2Bmn + Cn^2)$
$$= (Am^2 - Cn^2)^2.$$

Damit ist die Gleichung (1) transformirt. Man erhält diese Transformation aus III, wenn man in III $p = m$, $q = n$ setzt; sie ist also nur ein specieller Fall von III.

Wendet man das hier angegebene Verfahren auf die Gleichung 10 an und nimmt z. B. $m = 3$, $n = 1$, so hat man:

$$4.9.1.(9a - 7b + 3x)(9b - 7a + 3x)$$
$$= 36(3a + 3b + x)^2$$
$$(74a - 54b + 30x)^2 - (88a - 72b + 24x)^2$$
$$= (18a + 18b + 6x)^2$$
$$(74a - 54b + 30x)^2 - (18a + 18b + 6x)^2$$
$$= (88a - 72b + 24x)^2$$
$$(92a - 36b + 36x)(56a - 72b + 24x)$$
$$= (88a - 72b + 24x)^2, \text{ d. h.}$$

38. $(23a - 9b + 9x)(14a - 18b + 6x)$
$$= (22a - 18b + 6x)^2$$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Als einfachsten Fall würde man $m = n = 1$ setzen. Dann hat man aus der Gleichung 10:

$$(a + b + 3x)^2 - (8a - 8b)^2 = (3a + 3b + x)^2$$
$$(a + b + 3x)^2 - (3a + 3b + 3x)^2 = (8a - 8b)^2$$
$$(4a + 4b + 4x)(2x - 2a - 2b) = (8a - 8b)^2, \text{ d. h.}$$

39. $(x + a + b)(2x - 2a - 2b) = 16(a - b)^2$

L. wie in 38.

Wollte man aus der Gleichung 39 in derselben Weise weiter schliefsen, so würde man auf die ursprüngliche Gleichung 10 wieder zurückkommen. Man mufs dann schon Faktoren zu Hülfe nehmen, wie es bei Herstellung der Formel IV geschehen ist.

e. In c. sind drei verschiedene symmetrische Gleichungen des 4. Grades (α), (α_1) und (α_2) angeführt worden, aus denen drei verschiedene Gleichungen (β), (β_1) und (β_2) oder die Gleichungen in (16) hergeleitet sind, welche alle dieselbe Form (1) und dieselbe Lösung (12) haben. Die Gleichungen (α), (α_1) und (α_2) sind nicht durch Zufall gefunden. Es tritt uns daher die vierte Frage entgegen:

Wie findet man eine symmetrische Gleichung des 4. Grades, welche auf eine Gleichung von der Form (1) führt, wenn die Lösung dieser Gleichung im voraus gegeben ist?

Es möge die Lösung der quadratischen Gleichung

$$1)\quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

sein. Dann hat man die Aufgabe zu lösen:

In einer symmetrischen Gleichung des vierten Grades von der Form

$$(25)\quad \frac{mx^4 + nx^3y + px^2y^2 + nxy^3 + my^4}{m_1x^4 + n_1x^3y + p_1x^2y^2 + n_1xy^3 + m_1y^4} = \frac{a}{b}$$

die Koefficienten m, n u.s.w. so zu bestimmen, dafs man bei der Auflösung dieser Gleichung auf eine Quadratwurzel

$$(26)\quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

kommt.

Die Lösung dieser Aufgabe ist scheinbar nicht ohne Schwierigkeit, in der That aber sehr einfach. Man hat nur die Anmerkung zu AG. I. 406 zu beachten. Der Zähler und der Nenner in (25) links sind so zu bestimmen, dafs sie, in (26) für a und b gesetzt, ein rationales r ergeben. Die oben gestellte Aufgabe ist daher im wesentlichen nur eine Diophantische Aufgabe zweiten Grades. Es sind zunächst in (26) für a und b nur solche Ausdrücke zu suchen, welche die Wurzel rational machen. Man kann setzen

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + bz$$

und erhält

$$b = 2az + bz^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - z^2}{2z},$$

d. h., wenn man $z = \frac{w}{v}$ setzt,

$$(27)\quad \frac{v^2 - w^2}{2vw} = \frac{a}{b}.$$

Diese Gleichung mufs mit der Gleichung (25) identisch werden. Man hat daher für v und w in (27) nur ganz beliebige homogene symmetrische quadratische Ausdrücke von x und y zu setzen, und die gesuchte Gleichung (25) ist gefunden. Man kann allgemein setzen:

$$(28)\quad \begin{aligned} v &= \alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2 \\ w &= \alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \alpha_1 y^2. \end{aligned}$$

Dann erhält man aus (27)

$$(29)\quad \frac{(\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2)^2 - (\alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \alpha_1 y^2)^2}{2(\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2)(\alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \alpha_1 y^2)} = \frac{a}{b}$$

als die gesuchte symmetrische Gleichung des vierten Grades, deren Auflösung auf die Quadratwurzel (26) und daher auf eine solche quadratische Gleichung von der Form (1) führen mufs, deren Lösung in 1) gegeben ist.

Aus (29) findet man

$$(30)\quad \frac{\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \alpha_1 y^2} = \frac{r+a}{b} = \frac{b}{r-a}$$

für $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, also

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(r+a)\beta_1 - b\beta}{b\alpha - (r+a)\alpha_1} = \frac{b\beta_1 - (r-a)\beta}{(r-a)\alpha - b\alpha_1}.$$

Hieraus sind die Darstellungen von t zu entwickeln und aus diesen die quadratische Gleichung zu formiren. Man findet, wenn man im Nenner mit 2 multiplicirt und einfache korr-Add. anwendet, nach (8) in Ea. und nach (28) in Ec.

$$t = \sqrt{\frac{(2\alpha-\beta)b-(2\alpha_1-\beta_1)(r+a)}{(2\alpha_1+\beta_1)(r+a)-(2\alpha+\beta)b}} = \sqrt{\frac{(2\alpha-\beta)(r-a)-2(\alpha_1-\beta_1)b}{(2\alpha_1+\beta_1)b-(2\alpha+\beta)(r-a)}}$$

Nach AG. I. 406d. müssen dies die Darstellungen von t mit den Indices $\alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \alpha_1 y^2$ und $\alpha x^2 + \beta xy + \alpha y^2$ sein. Nach Ec. und nach AG. II. 236 mufs man wegen des Nenners in (29) diese Darstellungen multipliciren, um t_4 zu erhalten. Setzt man der Kürze wegen

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= m \qquad & 2\alpha_1 + \beta_1 &= p \\ 2\alpha - \beta &= n \qquad & 2\alpha_1 - \beta_1 &= q, \end{aligned}$$

so hat man

$$(31)\quad t = \sqrt{\frac{nb - q(r + a)}{p(r + a) - mb}} = \sqrt{\frac{n(r - a) - qb}{pb - m(r - a)}},$$

und weiter:

$$(32)\left|\begin{aligned}&\big(nb - q(r+a)\big)\big(n(r-a) - qb\big) = b\big((n^2+q^2)r - (n^2-q^2)a - 2nqb\big)\\ &\big(p(r+a) - mb\big)\big(pb - m(r-a)\big) = b\big((m^2+p^2)r - (m^2-p^2)a - 2mpb\big).\end{aligned}\right.$$

Daher endlich

$$t_4 = \sqrt[4]{\frac{(n^2 + q^2)r - (n^2 - q^2)a - 2nqb}{(m^2 + p^2)r - (m^2 - p^2)a - 2mpb}}.$$

Es ist nur noch das Produkt des Zählers und Nenners im Radikanden von t_4 zu suchen. Nun hat man für die links in (32) vorkommenden Faktoren

$$\begin{aligned}&\big(nb - q(r + a)\big)\big(pb - m(r - a)\big)\\ &= b\big((mn - pq)a + (mq + np)b - (mn + pq)r\big),\\ &\big(p(r + a) - mb\big)\big(n(r - a) - qb\big)\\ &= b\big((mn - pq)a + (mq + np)b - (mn + pq)r\big).\end{aligned}$$

Daher folgt aus der Multiplikation des Zählers und des Nenners im Radikanden von t_4 oder der Gleichungen (32), wenn man $-x$ statt r setzt, was gestattet ist, da r eine Quadratwurzel ist, die gesuchte quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}&\big((m^2-p^2)x + 2mpb + (m^2+p^2)x\big)\big((n^2-q^2)a + 2nqb + (n^2+q^2)x\big)\\ (33)\quad &= \big((mn - pq)a + (mq + np)b + (mn + pq)x\big)^2\\ &\text{L. } x = \sqrt{a^2 + b^2}.\end{aligned}$$

Die Gröſsen m, n, p und q sind willkürlich. Man kann für dieselben ganz beliebige Zahlen setzen und so unendlich viele Gleichungen erhalten, welche den gestellten Anforderungen genügen, d. h. welche alle dieselbe Lösung 1) und dieselbe Form (1) haben.

Die Aufstellung der Gleichung (33) war wegen der Allgemeinheit der Betrachtung ein wenig umständlich. Es wird sich später zeigen, daſs sich diese Gleichung direkt aus der gegebenen Lösung formiren läſst. Nimmt man statt der in (28) gemachten allgemeinen Substitution specielle Fälle, so ist die Entwickelung der quadratischen Gleichung nur sehr einfach.

Setzt man in (27) erstens

$$v = 2(x^2 + y^2), \quad w = (x - y)^2, \text{ also}$$

$$v + w = 3x^2 - 2xy + 3y^2, \quad v - w = (x + y)^2,$$

so geht (27) über in die oben in c. behandelte Gleichung

$$(\alpha) \quad \frac{(3x^2 - 2xy + 3y^2)(x + y)^2}{4(x^2 + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Die gemachten Substitutionen sind gewählt, um in der sich ergebenden symmetrischen Gleichung des 4. Grades links im Zähler den Faktor $(x + y)^2$, im Nenner den Faktor $(x - y)^2$ zu erhalten, damit sich schliefslich t_4 leicht entwickeln läfst.

Setzt man in (27) zweitens

$$v = x^2 + y^2, \quad w = 3xy,$$

so erhält man die oben in c. behandelte Gleichung

$$(\alpha_1) \quad \frac{x^4 - 7x^2y^2 + y^4}{6xy(x^2 + y^2)} = \frac{a}{b}.$$

Setzt man in (27) drittens

$$v = x^2 + y^2, \quad w = xy,$$

so geht (27) über in die oben in c. behandelte Gleichung

$$(\alpha_2) \quad \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{2xy(x^2 + y^2)} = \frac{a}{b}.$$

Auf dem hier angegebenen Wege sind die oben in c. behandelten symmetrischen Gleichungen des 4. Grades gefunden. Es ist dort gezeigt, dafs sie auf dieselbe Quadratwurzel

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

führen, und dafs und wie man aus denselben eine quadratische Gleichung von der hier behandelten Form ableiten kann, deren Lösung die oben in 1) angegebene ist.

Aus dem Obigen erhellt auch, dafs die Zahl der symmetrischen Gleichungen des 4. Grades, deren Auflösung auf dieselbe Quadratwurzel, hier auf die in 1) angegebene, führt, unendlich ist.

Es möge als Lösung

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$$

gegeben sein. Um die Wurzel rational zu machen, kann man nach der Theorie der Diophantischen Gleichungen setzen: $x = a + bz$, $az + b$, $(a + b) + 2bz$, $(5a + b) - 2az$, $(a + 5b) - 2bz$. Wählt man das letztere, so erhält man

$$\sqrt{a^2 + 10ab + b^2} = \sqrt{(a + 5b)^2 - 24b^2} = (a + 5b) - 2bz$$

$$6b = (a + 5b)z - bz^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{z^2 - 5z + 6}{z} = \frac{(z-3)(z-2)}{z},$$

also, wenn man $\frac{v}{w}$ statt z setzt,

$$(34) \quad \frac{(v - 3w)(v - 2w)}{vw} = \frac{a}{b}.$$

Setzt man hierin

$$v = 3(x - y)^2, \quad w = x^2 - 4xy + y^2,$$

so erhält man die Gleichung (2). Setzt man

$$v = (x + y)^2, \quad w = 2xy,$$

so giebt das

$$(35) \quad \frac{(x^2 - 4xy + y^2)(x - y)^2}{2xy(x + y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich als Darstellungen von t:

$$(36) \quad \sqrt{\frac{a + 5b + r}{a + b + r}} = \sqrt{\frac{a - 7b + r}{3a - b - r}} = \sqrt[4]{\frac{3(a + 5b + r)}{5a + b + r}},$$

$$r = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Setzt man die 1. und 3. Darstellung einander gleich und x statt r, so erhält man ebenfalls die Gleichung 8:

$$(a + 5b + x)(5a + b + x) = 3(a + b + x)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Setzt man in (34)

$$v = x^2 + y^2, \quad w = xy,$$

so erhält man

$$(37) \quad \frac{(x^2 - 3xy + y^2)(x - y)^2}{xy(x^2 + y^2)} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus ergeben sich als Darstellungen von t:

$$(38) \quad \begin{aligned} &\sqrt{\frac{a + 9b + r}{a + b + r}} = \sqrt{\frac{11b + a - r}{b - a + r}} = \sqrt{\frac{a + 5b + 5r}{5a + b + r}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{5a + 49b + r}{5a + b + r}}, \quad r = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}. \end{aligned}$$

Die 3. Darstellung ist die für t mit dem Index $x^2 - 3xy + y^2$. Sie ist gefunden nach (32) in Ec. Setzt man die 3. und 4. Darstellung einander gleich und x statt r, so erhält man

40. $(5a + 49b + x)(5a + b + x) = (a + 5b + 5x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Dafs man diese Gleichung auch durch Transformation nach d. aus der Gleichung 8 ableiten kann, ist einleuchtend.

Es möge als Lösung

$$3) \quad x = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}$$

gegeben sein. Hier kann man, um die Wurzel rational zu machen, setzen: $x = a + bz$, $(a + 5b) + bz$, $(a + 11b)z$, $(a - b)z$. Für den letzten Fall hat man

$$(a - b)(a + 11b) = (a - b)^2 z^2$$

$$a + 11b = (a - b) z^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{z^2 + 11}{z^2 - 1}, \quad \text{für } z = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{w}}$$

$$(39) \quad \frac{a}{b} = \frac{\mathfrak{r}^2 + 11\mathfrak{w}^2}{\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{w}^2}.$$

Setzt man hierin weiter

$$\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}(x^2 - 4xy + y^2), \quad \mathfrak{w} = xy,$$

so erhält man die oben in (4) angegebene symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$\frac{(x^2 - 4xy + y^2)^2 + 44x^2y^2}{(x^2 - 6xy + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}$$

und kommt, wie dort gezeigt ist, direkt auf die Gleichung 9. — Setzt man in (39)

$$\mathfrak{r} = x^2 + xy + y^2, \quad \mathfrak{w} = xy,$$

so erhält man

$$(40) \quad \frac{(x^2 + xy - y^2)^2 + 11x^2y^2}{(x^2 + y^2)(x + y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus folgern die Darstellungen von t:

$$(41) \quad \sqrt{\frac{r + a - b}{r - 3a + 3b}} = \sqrt{\frac{a - 5b + r}{7b - a - r}} = \sqrt[4]{\frac{a + 5b + r}{5a + b - 3r}},$$

$$r = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}.$$

Setzt man die 2. und 3. Darstellung einander gleich und x statt r, so erhält man

41. $(5a + b - 3x)(a + 5b + x) = (7b - a - x)^2$

L. $x = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}$.

Diese Gleichung läfst sich nach der Formel II in d. leicht auf die Gleichung 9 reduciren, da beide links den Faktor $a + 5b + x$ gemeinsam haben.

Es sind als Lösung

$$4) \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Setzt man, um die Wurzel rational zu machen,

$$x = a - bz,\text{*)}$$

so hat man weiter

$$a^2 - b^2 = (a - bz)^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \text{ also für } z = \frac{v}{w}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{v^2 + w^2}{2vw}.$$

Setzt man hierin

$$w = x^2 + y^2, \quad v = xy,$$

so erhält man die symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$(42) \quad \frac{x^4 + 3x^2y^2 + y^4}{2xy(x^2 + y^2)} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus ergeben sich die Darstellungen von t:

$$(43) \quad \sqrt{\frac{a + 2b + r}{a - 2b + r}} = \sqrt{\frac{b + 2a - 2r}{b - 2a + 2r}} = \sqrt[4]{\frac{5a + 4b - 3r}{5a - 4b - 3r}},$$

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Drückt man das Produkt des Zählers und des Nenners im Radikanden von t_4 durch ein Quadrat aus und setzt x statt r, so erhält man

42. $(5a + 4b - 3x)(5a - 4b - 3x) = (5x - 3a)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Vergleicht man diese Gleichung mit (1), so ist

$$A = 5a + 4b - 3x$$
$$C = 5a - 4b - 3x$$
$$B = 5x - 3a.$$

---

*) Man hätte auch $x = (a - b)z$ setzen können.

Setzt man diese Werte in die 5 ersten der oben in (18) entwickelten Transformationsformeln, so erhält man:

43. $(a + x)(a - x) = b^2$

44. $(13a + 12b + 5x)(37a + 12b - 35x)$
$= (15a + 20b - 9x)^2$

45. $(13a + 12b + 5x)(13a - 12b + 5x) = (5a + 13x)^2$

46. $(13a - 12b + 5x)(37a - 12b - 35x)$
$= (9x - 15a + 20b)^2$

47. $(37a + 12b - 35x)(37a - 12b - 35x) = (35a - 37x)^2$.

Die allen diesen Gleichungen gemeinsame Lösung ist wie bei 42,

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Es sei als Lösung

$$5) \quad x = \sqrt{ab}$$

gegeben. Dann hat man

$$x = \sqrt{ab} = bz$$

$$a = bz^2, \quad \frac{a}{b} = z^2 = \frac{v^2}{w^2}.$$

Setzt man

$$v = x^2 + 3xy + y^2, \quad w = x^2 - xy + y^2,$$

so erhält man

$$(44) \quad \frac{(x^2 + 3xy + y)^2}{(x^2 - xy + y^2)^2} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus als Darstellungen von t:

$$(45) \quad \sqrt{\frac{b + 3r}{5b - r}} = \sqrt{\frac{r + 3a}{5r - a}} = \sqrt[4]{\frac{9a + b + 6r}{a + 25b - 10r}},$$
$$r = \sqrt{ab}.$$

Dann erhält man weiter in der schon oft angewendeten Weise:

48. $(9a + b + 6x)(a + 25b - 10x) = (14x - 3a + 5b)^2$
L. $x = \sqrt{ab}$.

Auch aus dieser Gleichung kann man, wie oben aus der Gleichung 42, durch Transformation beliebig viele andere entwickeln.

f. In e. ist gezeigt, dafs man bei einer vorherbestimmten Lösung für eine quadratische Gleichung unendliche viele symmetrische Gleichungen des 4. Grades entwickeln kann, von denen jede eine quadratische Gleichung von der verlangten Form und mit der gegebenen Lösung liefert. Aus den obigen Erörterungen erhellt aber auch zugleich, dafs man nur selten auf eine symmetrische Gleichung des 4. Grades kommen wird, aus welcher sich gerade eine vorgelegte bestimmte quadratische Gleichung mit der angegebenen Lösung ergiebt.

Es liegt daher die fünfte Frage nahe:

Wenn eine reine quadratische Gleichung von der Form (1) nebst ihrer Lösung gegeben ist, wie findet man die symmetrische Gleichung des vierten Grades, welche direkt die gegebene quadratische Gleichung liefert?

Das einfachste Verfahren, um diese Aufgabe zu lösen, ist, die vorgelegte quadratische Gleichung als Quotientengleichung zu formiren und die Quotienten als Darstellungen von

$$t^2 \text{ oder } \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

aufzufassen.

So hat man für die Gleichung 10, indem man r für x setzt,

$$\frac{9a - 7b + 3r}{3a + 3b + r} = \frac{3a + 3b + r}{9b - 7a + 3r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

$$r = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}.$$

Jetzt ist nur r zu eliminiren und der Quotient $\frac{a}{b}$ zu bestimmen. Durch Anwendung des KS. mit Addition und Subtraktion hat man zunächst

$$\frac{3a - b + r}{3b - a + r} = \frac{3a - 5b + r}{5a - 3b - r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2,$$

und hieraus auf demselben Wege

$$\frac{3a - 3b + r}{2a} = \frac{2b}{3b - 3a + r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

Daher die beiden Gleichungen:

$$\left|\begin{aligned} 3a - 3b + r &= 2a \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 \\ 3b - 3a + r &= 2b \cdot \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \end{aligned}\right|.$$

Um r fortzuschaffen, sind die Gleichungen von einander zu subtrahiren. Damit erhält man leicht

$$\frac{(x^2 + 4xy + y^2)(x-y)^2}{(x^2 - 4xy + y^2)(x+y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus ergeben sich als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{3a-b+r}{3b-a+r}} = \sqrt{\frac{3a-5b+r}{5a-3b+r}} = \sqrt{\frac{3a+5b+r}{9b-7a+3r}} = \sqrt{\frac{9a-7b+3r}{3a+3b+r}},$$

$$r = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}.$$

Die 3. und 4. Darstellung sind bezw. die für t mit den Indices $x^2 + 4xy + y^2$ und $x^2 - 4xy + y^2$. Sie sind nach (32) in Ec. oder nach AG. II. 233 gefunden.

Aus der Gleichsetzung der 3. und 4. Darstellung ergiebt sich, wenn man x statt r setzt, direkt die Gleichung 10, von der wir ausgegangen sind. — Aus der Multiplikation der 3. und 4. Darstellung würde t_4 folgen; dies zu entwickeln, ist jedoch in diesem Falle zur Aufstellung der betreffenden Gleichung nicht nötig.

Für die Gleichung 11 hätte man zu setzen

$$\frac{3a+3b+3r}{a+17b+r} = \frac{17a+b+r}{3a+3b+3r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2, \text{ d. h.}$$

$$\frac{5a+b+r}{a+5b+r} = \frac{7a-b-r}{a-7b+r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2, \text{ oder}$$

$$\frac{x-a+b}{6b} = \frac{6a}{r+a-b} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

$$\left|\begin{aligned} r - a + b &= 6b \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 \\ r + a - b &= 6a \cdot \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \end{aligned}\right|.$$

Durch Subtraktion mithin

$$a - b = 3a \cdot \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 - 3b \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

$$\frac{(x^2 + 4xy + y^2)(x+y)^2}{(x^2 - 4xy + y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b},$$

die gesuchte symmetrische Gleichung des 4. Grades.

Aus derselben ergeben sich als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{5a+b+r}{a+5b+r}}=\sqrt{\frac{7a-b-r}{a-7b+r}}=\sqrt{\frac{17a+b+r}{3(a+b+r)}}=\sqrt{\frac{3(a+b+r)}{a+17b+r}}$$

$$r=\sqrt{a^2+34ab+b^2}.$$

Die 3. und 4. Darstellung sind bezw. die für t mit den Indices $x^2+4xy+y^2$ und $x^2-4xy+y^2$. Setzt man diese einander gleich und x statt r, so erhält man die Gleichung 11, von welcher wir ausgegangen sind.

g. In a. sind Gleichungen von der hier behandelten Form aufgestellt, ohne daſs die Lösung vorherbestimmt war. Es ist in b. weiter gezeigt, daſs die eigentliche Quelle für diese Gleichungen die symmetrischen Gleichungen des vierten Grades sind. Es ist endlich in e. auch gezeigt, wie man mit Hülfe der symmetrischen Gleichungen des 4. Grades quadratische Gleichungen von der hier behandelten Form aufstellen kann, wenn die Lösung vorher bestimmt ist. Es liegt daher die sechste Frage nahe:

> Wie kann man ohne Hülfe von symmetrischen Gleichungen des 4. Grades eine quadratische Gleichung von der Form (1) direkt aus der Lösung ableiten, wenn diese gegeben oder im voraus bestimmt ist?

Man bringe diese Gleichung, durch welche die Lösung angegeben wird, auf die Form (1). Das ist immer sehr leicht, wenn es überhaupt möglich ist. Die so aufgestellte Gleichung ist dann nach d. beliebig zu transformiren.

Einige Beispiele werden genügen, das Verfahren klar zu legen.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x=\sqrt{a^2+10ab+b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2=a+10ab+b^2=(a+5b)^2-24b^2$$

$$(a+5b)^2-x^2=24b^2$$

$$(a+5b+x)(a+5b-x)=24b^2,$$

also, wenn man noch mit 6 multiplicirt, um die Form genau inne zu halten,

49. $(3a+15b+3x)(2a+10b-2x)=144b^2$

L. $x=\sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Damit ist die Aufgabe schon gelöst. Aus dieser Gleichung können durch Transformation nach d. beliebig viele andere mit derselben Lösung abgeleitet werden. Wenn man für die gewonnene Gleichung das zur Formation der Gleichung (3) angewendete Verfahren benutzt, so hat man

$$\frac{3a+15b+3x}{12b}=\frac{12b}{2a+10b-2x}$$

$$\frac{3a+15b+3x}{3a+3b+3x}=\frac{12b}{2b-2a+2x}=\frac{3a+3b+3x}{5a+b+x}.$$

Es ist gebildet $3a+5b+3x$ durch korr. Subtraktion aus $(3a+15b+3x)-12b$, daher ebenso $2b-2a+2x$ aus $12b-(2a+10b-2x)$. Dann ist weiter der dritte Quotient aus den beiden ersten nach dem KS. durch Subtraktion gebildet. Die Gleichsetzung des ersten und dritten Quotienten giebt die Gleichung 8, nämlich

$(a+5b+x)(5a+b+x)=3(a+b+x)^2$

L. $x=\sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Es sei als Lösung

$$2)\quad x=\sqrt{(a-b)(a+11b)}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2=a^2+10ab-11b^2=(a+5b)^2-36b^2$$

$$(a+5b)^2-x^2=36b^2$$

$$(46)\quad (a+5b+x)(a+5b-x)=35b^2.$$

Damit ist die Aufgabe schon gelöst, denn die Gleichung hat die Form (1) und die gegebene Lösung. Aus derselben lassen sich nach d. beliebig viele andere mit derselben Lösung ableiten. Um gerade die Gleichung 9 zu erhalten, kann man, ohne Transformationsformel, ähnlich wie bei 35—37 verfahren. Man hat aus (46):

$$\frac{a+5b+x}{6b}=\frac{6b}{a+5b-x}$$

$$\frac{a+5b+x}{2a+4b+2x}=\frac{6b}{7b-a+x}=\frac{2a+4b+2x}{5a+b+3x}.$$

Es ist durch korr. Subtraktion gebildet $2a + 4b + 2x$ aus $2(a + 5b + x) - 6b$, gleich dem doppelten Zähler vermindert um den Nenner, daher ebenso $7b - a + x$ aus $2 \cdot 6b - (a + 5b - x)$. Der Zähler und der Nenner des dritten Quotienten sind bezw. aus den Zählern und Nennern der beiden ersten Quotienten gebildet, wie der Nenner des ersten Quotienten aus dem Zähler und Nenner des ersten Quotienten der vorhergehenden Gleichung, d. h. nach dem KS. durch Subtraktion, nachdem der erste Quotient mit 2 erweitert ist. — Setzt man den ersten und dritten Quotienten einander gleich, so erhält man die Gleichung 9, nämlich

$$(a + 5b + x)(5a + b + 3x) = 4(a + 2b + x)^2.$$

Noch einfacher hat man aus der Lösung sofort

$$(47) \quad (a - b)(a + 11b) = x^2.$$

Damit ist eigentlich die Aufgabe schon gelöst. Will man durch direkte Transformation von (47) auf die Gleichung 9 kommen, so hat man

$$\frac{a + 11b}{x} = \frac{x}{a - b}$$

$$(48) \quad \frac{a + 11b + x}{a - b + x} = \frac{a + 11b + 3x}{3a - 3b + x}$$

$$(49) \quad \frac{2a + 10b + 2x}{4a + 8b + 4x} = \frac{4a + 8b + 4x}{10a + 2b + 6x}, \text{ d. h.}$$

$$(a + 5b + x)(5a + b + 3x) = 4(a + 2b + x)^2.$$

Die Quotienten in (48) ergeben sich nach dem KS. aus den Quotienten der vorhergehenden Gleichung: der erste durch Addition; der zweite ebenfalls durch Addition, nachdem der zweite der vorhergehenden Gleichung mit 3 erweitert ist. Weiter folgt (49) aus (48) durch korr. Addition: die Zähler durch einfache Addition, die Nenner ebenfalls durch Addition, nachdem der Nenner mit 3 erweitert ist, nämlich $2a + 10b + 2x = (a + 11b + x) + (a - b + x)$, $4a + 8b + 4x = (a + 11b + x) + 3(a - b + x)$ u. s. w.

Wendet man auf (47), wofür nach (1)

$$A = a - b, \quad B = x, \quad C = a + 11b$$

ist, die 3., 8. und 9. der oben in (18) entwickelten Transformationsformeln an, so erhält man

50. $(5a + 7b + 4x)(5a + 43b + 4x) = (4a + 20b + 5x)^2$
51. $(5a + b + 3x)(5a + 49b + 3x) = (3a + 15b + 5x)^2$
52. $(13a + 95b + 12x)(13a + 35b + 12x)$
$= (12a + 60b + 13x)^2$

L. $x = \sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

Es sei als Lösung

$$3)\quad x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2 = (3a - \tfrac{7}{3}b)^2 - \tfrac{49}{9}b^2 + 9b^2, \text{ d. h.}$$

$$9x^2 - (9a - 7b)^2 = 32b^2$$

$$(3x + 9a - 7b)(3x - 9a + 7b) = 32b^2.$$

Multiplicirt man beiderseits mit 2, so ist die Aufgabe gelöst. Um die Gleichung 10 direkt abzuleiten, hat man

$$\frac{3x + 9a - 7b}{8b} = \frac{8b}{6x - 18a + 14b}$$

$$\frac{3x + 9a - 7b}{3x + 9a + 9b} = \frac{8b}{12x - 36a + 36b} = \frac{3x + 9a + 9b}{27x - 63a + 81b},$$

Die Nenner des ersten und zweiten Quotienten ergeben sich aus den vorhergehenden Quotienten durch korr. Addition, nachdem die Nenner mit 2 multiplicirt sind. Dann ergiebt sich der dritte Quotient nach dem KS. durch Addition, nachdem der zweite mit 2 erweitert ist. Setzt man den ersten Quotienten gleich dem dritten, so erhält man

$$(3x + 9a - 7b)(3x + 9b - 7a) = (x + 3a + 3b)^2,$$

d. h. die Gleichung 10.

Es sei als Lösung

$$4)\quad x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$(a + 17b)^2 - x^2 = 288b^2$$

$$(a + 17b + x)(a + 17b - x) = 288b^2.$$

Multiplicirt man mit 2, so ist die Aufgabe gelöst. Um durch direkte Transformation auf die Gleichung 11 zu kommen, hat man

$$\frac{a + 17b + x}{24b} = \frac{24b}{2a + 34b - 2x}$$

$$\frac{a + 17b + x}{3a + 3b + 3x} = \frac{24b}{4b - 4a + 4x} = \frac{3a + 3b + 3x}{17a + b + x} \, .$$

Es ist gebildet $3a + 3b + 3x$ und $3(a + 17b + x) - 2 \cdot 24b$. Daraus ergiebt sich das Weitere von selbst. — Aus der Gleichsetzung des ersten und dritten Quotienten hat man

$$(a + 17b + x)(17a + b + x) = 9(a + b + x)^2,$$

d. h. die Gleichung 11.

Es sei als Lösung

$$5) \quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2 = (a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{3}{4}b^2$$

$$4x^2 - (2a - b)^2 = 3b^2$$

$$(2x + 2a - b)(2x - 2a + b) = 3b^2$$

$$(6x + 6a - 3b)(2x - 2a + b) = 9b^2.$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Um diese Gleichung zu transformiren, ist wegen (1)

$$A = 6x + 6a - 3b, \quad B = 3b, \quad C = 2x - 2a + b$$

zu setzen. Dann erhält man nach den ersten 5 Formeln in (18) folgende Gleichungen:

53. $(a + b + 2x)(a - 2b + 2x) = (2a - b + x)^2$

54. $(22a + b + 26x)(22a - 23b + 26x) = (26a - 13b + 22x)^2$

55. $(26x + 22a + b)(14x - 2a + 13b) = 16x + 8a + 11b)^2$

56. $(14x - 2a + 13b)(14x - 2a - 11b) = (2x - 14a + 7b)^2$

57. $(26x + 22a - 23b)(14x - 2a - 11b) = (16x + 4a - 19b)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Es sei als Lösung

$$6) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2 - a^2 = b^2$$

$$(50) \quad (x + a)(x - a) = b^2.$$

Damit ist die Aufgabe eigentlich schon gelöst. Um di[e] Gleichung zu transformiren, sind die Formeln in (18) wenig[er] geeignet, da hier die Gröſse B, welche $= b$ wird, zu ein[-] fach ist. Setzt man in der allgemeinen Formel III in [d.] statt m, n, p und q bezw. 1) 1, 2, 2, 3; 2) 2, 1, 3, 4; 3) 4, 1, 2, 5, so erhält man als weitere Transformations- formeln von (1):

$$
(51)\quad
\begin{aligned}
&1)\quad (A + 4B + 4C)(4A + 12B + 9C) \\
&\qquad = (2A + 7B + 6C)^2 \\
&2)\quad (4A + 4B + C)(9A + 24B + 16C) \\
&\qquad = (6A + 11B + 4C)^2 \\
&3)\quad (16A + 8B + C)(4A + 20B + 25C) \\
&\qquad = (8A + 22B + 5C)^2.
\end{aligned}
$$

Hierin ist wegen (50) zu setzen:

$$(52)\quad A = x + a, \quad B = b, \quad C = x - a.$$

Dann erhält man:

58. $(5x - 3a + 4b)(13x - 5a + 12b) = (8x - 4a + 7b)$

59. $(5x + 3a + 4b)(25x - 7a + 24b) = (10x + 2a + 11b)^2$

60. $(17x + 15a + 8b)(29x - 21a + 20b) = (13x + 3a + 22b)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Diese Gleichungen bilden gleichsam eine Fortsetzung der Gleichungen (16) und der Gleichungen 6—14 in d. Aus allen diesen Gleichungen kann man wieder neue bilden, wenn man a und b vertauscht, was nach der Lösung gestattet ist. Auch kann man das Zeichen von a oder von b oder von x ändern u.s.w. Alle hier genannten Gleichungen müssen in der allgemeinen Gleichung (33) enthalten sein. So erhält man 58. aus (33), wenn man in (33) $m = 1$, $n = 2$, $p = 2$, $q = 3$ setzt.

Man muſs für die angegebene Lösung eine allgemeine Gleichung auch erhalten, wenn man die Substitution (52) in der allgemeinen Transformationsformel III in d. macht. Man erhält

61. $\big((m^2 - n^2)a + 2mnb + (m^2 + n^2)x\big)\cdot$

$$\big((p^2 - q^2)a + 2pqb + (p^2 + q^2)x\big)$$

$$= \big((mp - nq)a + (mq + np)b + (mp + nq)x\big)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Diese Gleichung ist von der auf einem ganz andern Wege in (33) aufgestellten Gleichung nicht verschieden. Sie geht in jene über, wenn man p statt n, n statt p setzt.

So läfst sich für jede Lösung eine allgemeine Gleichung von der Form (1) aufstellen, in welcher alle für die Lösung möglichen Gleichungen von der Form (1) enthalten sind. Für die meisten Lösungen werden jedoch diese allgemeinen Gleichungen etwas unförmlich.

Es sei als Lösung

$$7)\quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$a^2 - x^2 = b^2$$

$$(a + x)(a - x) = b^2.$$

Wendet man, um diese Gleichung etwas ansehnlicher zu machen, auf dieselbe die Formeln in (51) an, wo also

$$A = a + x,\quad B = b,\quad C = a - x$$

zu setzen ist, so erhält man:

62. $(5a + 4b - 3x)(13a + 12b - 5x) = (8a + 7b - 4x)^2$

63. $(5a + 4b + 3x)(25a + 24b - 7x) = (10a + 11b + 2x)^2$

64. $(17a + 8b + 15x)(29a + 20b - 21x) = (13a + 22b + 3x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Diese Gleichungen ergeben sich aus den Gleichungen 58—60, wenn man in den letzteren a und x vertauscht. Überhaupt müssen alle Gleichungen, welche bisher für die Lösung $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ aufgestellt sind, übergehen in Gleichungen, welche die Lösung $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ haben, wenn man a und x vertauscht; denn durch diese Vertauschung wird die Gleichung $x^2 = a^2 + b^2$ in die Gleichung $a^2 = x^2 + b^2$, d. h. $x^2 = a^2 - b^2$ verwandelt.

Auch für diese Lösung läfst sich leicht eine allgemeine Gleichung aufstellen. Man erhält sie am einfachsten aus 61, wenn man a und x vertauscht. Das giebt

65. $$\big((m^2+n^2)\,a + 2mnb + (m^2-n^2)\,x\big)\cdot$$
$$\big((p^2+q^2)a + 2pqb + (p^2-q^2)\,x\big)$$
$$= \big((mp+nq)\,a + (mq+np)\,b + (mp-nq)\,x\big)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

In dieser Gleichung sind, wenn man den willkürlichen Gröfsen m, n, p und q nur die geeigneten Werte giebt, alle Gleichungen von der Form (1) enthalten, welche die Lösung $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ haben.

Es sei als Lösung

8) $x = \sqrt{ab}$

gegeben. Dann hat man

$$ab = x^2.$$

Damit ist die Aufgabe eigentlich schon gelöst. Wendet man auf diese Gleichung die Formeln in (51) an, so erhält man, da

(53) $A = a$, $B = x$, $C = b$

zu setzen ist, folgende Gleichungen:

66. $(a + 4b + 4x)(4a + 9b + 12x) = (2a + 6b + 7x)^2$

67. $(4a + b + 4x)(9a + 16b + 24x) = (6a + 4b + 11x)^2$

68. $(16a + b + 8x)(4a + 25b + 20x) = (8a + 5b + 22x)^2$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Macht man die Substitution (53) in der allgemeinen Transformationsformel III in d., so erhält man als allgemeine Gleichung, in welcher alle Gleichungen von der Form (1), welche die Lösung $x = \sqrt{ab}$ haben, enthalten sind,

69. $$(m^2a + n^2b + 2mnx)(p^2a + q^2b + 2pqx)$$
$$= \big(mpa + nqb + (mq + np)\,x\big)^2$$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Aus dieser Gleichung sind die Gleichungen 66—68 leicht hinzuschreiben.

Es sei schliefslich, um auch ein Zahlenbeispiel zu nehmen, als Lösung

$$9)\quad x = \pm 6$$

gegeben. Dann hat man

$$9 \cdot 4 = x^2.$$

Damit ist die Aufgabe eigentlich schon gelöst. Setzt man in der allgemeinen Formel III und d.

$$A = 9, \quad B = x, \quad C = 4,$$

so erhält man:

70. $(9m^2 + 2mnx + 4n^2)(9p^2 + 2pqx + 4q^2)$

$$= \left(9mp + (mq + np)x + 4np\right)^2$$

L. $x = \pm 6$.

Hätte man $12 \cdot 3 = x^2$ gesetzt, so wäre $A = 12, B = x, C = 3$ gewesen, und man hätte erhalten:

71. $(12m^2 + 2mnx + 3n^2)(12p^2 + 2pqx + 3q^2)$

$$= \left(12mp + (mq + np)x + 3nq\right)^2$$

L. $x = \pm 6$.

Setzt man für m, n, p, q beliebige Zahlen, so erhält man einfache Gleichungen, die aber kein besonderes Interesse darbieten.

h. In g. ist eine gröfsere Anzahl von Lösungen behandelt; es sind aus den durch die Lösung gegebenen Gleichungen Gleichungen von der Form (1) abgeleitet. Es liegt daher auch die Frage nahe:

> Sind für alle Lösungen quadratische Gleichungen von der Form (1) möglich, rationale Koefficienten vorausgesetzt, und wie müssen die Lösungen beschaffen sein, welche sich durch reine quadratische Gleichungen von der Form (1) ausdrücken lassen?

Nicht alle Lösungen, welche reinen quadratischen Gleichungen angehören können, lassen sich durch Gleichungen von der Form (1) ausdrücken. Es sind nur diejenigen von der Form

$$x = \sqrt{\mu a^2 + 2\varrho ab + \nu b^2},$$

welche sich rational machen lassen, wenn man für a und b geeignete Werte setzt. Insonderheit sind es daher solche, in welchen der Koefficient von a^2 oder b^2, d. h. μ oder ν ein Quadrat ist, oder wenn $\varrho^2 - \mu\nu$ ein Quadrat ist, d. h. wenn der Radikand der Lösung sich in Faktoren zerlegen läfst. In die letztere Kategorie gehört auch der Fall, wenn $\varrho^2 - \mu\nu = 0$, d. h. wenn die Lösung rational ist.

Es handelt sich nach dem Obigen nur darum, für die gegebene Lösung eine einzige Gleichung von der Form (1) aufzustellen. Aus dieser kann man durch die in d. angegebenen Transformationen beliebig viele andere ableiten.

Einige Beispiele werden das zur genüge erklären. Es sei als Lösung

$$1)\quad x = \sqrt{4a^2 - 3ab + 2b^2}$$

gegeben. Der Koefficient von a^2 ist ein Quadrat. Man hat daher

$$x^2 = \left(2a - \frac{3}{4}\,b\right)^2 + \frac{23}{16}\,b^2$$

$$16x^2 - (8a - 3b)^2 = 23b^2$$

$$(4x + 8a - 3b)(4x - 8a + 3b) = 23b^2.$$

Multiplicirt man mit 23, so ist die gesuchte Gleichung fertig.

Es sei als Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{2a^2 - 4ab + 9b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2 = \left(3b - \frac{2}{3}\,a\right)^2 + \frac{14}{9}\,a^2$$

$$9x^2 - (9b - 2a)^2 = 14a^2$$

$$(3x - 2a + 9b)(3x + 2a - 9b) = 14a^2.$$

Multiplicirt man beiderseits mit 14, so hat die Gleichung die verlangte Form.

Es sei als Lösung

$$3)\quad x = \sqrt{(3a + b)(a - 2b)}$$

gegeben. Dann hat man ganz einfach

$$(3a + b)(a - 2b) = x^2.$$

Diese Gleichung hat schon die verlangte Form. — Man kann jedoch auch sehr einfach setzen, indem man statt des Produkts die Differenz zweier Quadrate schreibt,

$$x^2 = \left(\frac{4a - b}{2}\right)^2 - \left(\frac{2a + 3b}{2}\right)^2$$

$$(4a - b)^2 - 4x^2 = (2a + 3b)^2$$

$$(4a - b + 2x)(4a - b - 2x) = (2a + 3b)^2.$$

Damit ist die oben aufgestellte Behauptung in den drei Hauptfällen als richtig erwiesen.

i. Bisher war nur von reinen quadratischen Gleichungen die Rede. Es liegt daher noch die Frage nahe:

> Läfst sich auch jede vollständige quadratische Gleichung auf die hier behandelte Form bringen, und wie geschieht das?

Die allgemeine quadratische Gleichung

$$ax^2 - bx + c = 0$$

bietet in dieser Beziehung wenig Interesse dar. Man hätte hier

$$4a^2x^2 - 4abx + 4ac = a$$

$$(2ax - b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$(b^2 - 4ac) \cdot 1 = (2ax - b)^2.$$

Diese Gleichung kann nach den in d. gegebenen Methoden transformirt werden; aber alle Gleichungen, welche man so erhält, sind unschön.

Viel interessanter werden die Formen, wenn die Wurzeln der Gleichung rational sind. Einige Beispiele werden genügen zu zeigen, wie man hier zu verfahren hat.

Es wird angenommen, dafs die Wurzeln der Gleichung gegeben sind. Man bildet dann aus den Wurzeln die einfachste quadratische Gleichung, bringt diese auf die Form (1), was stets, wie man aus der Behandlung der allgemeinen quadratischen Gleichung oben ersieht, sehr leicht ist, und transformirt diese direkt oder nach den aufgestellten Formeln in beliebig vielfacher Weise.

Es seien als Wurzeln der aufzustellenden Gleichung

$$1) \quad x_1 = a, \quad x_2 = b$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2 - (a+b)\,x + ab = 0$$

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$(54) \quad \bigl(2x - (a+b)\bigr)^2 = (a-b)^2.$$

Fafst man links oder rechts das Quadrat als ein Produkt auf, so hat die Gleichung die verlangte Form (1). Will man ohne Formel transformiren, wie es oben mehrfach geschehen ist, so hat man z. B. aus (54)

$$\frac{2x-a-b}{a-b} = \frac{a-b}{2x-a-b}$$

$$\frac{2x-a-b}{2x-3a+b} = \frac{a-b}{3a+b-4x} = \frac{2x-3a+b}{10x-9a-b}, \text{ d. h.}$$

72. $(a+b-2x)\,(9a+b-10x) = (2x-3a+b)^2$

L. $x = a,\ b$.

Das Verfahren wird verständlich sein. Es ist zuerst korr. Add. angewendet, $2x - 3a + b = (2x - a - b) - 2\,(a-b)$ u. s. w.; dann zur Bildung des dritten Quotienten der KS.

Will man mit Hülfe der allgemeinen Formel III in d. transformiren, so ist wegen (54) zu setzen:

$$(55) \quad A = C = 2x - a - b, \quad B = a - b.$$

Hier ist also $A = C$. Dadurch gehen die Formeln bei (51) über in:

1) $(5A + 4B)\,(13A + 12B) = (8A + 7B)^2$

2) $(5A + 4B)\,(25A + 24B) = (10A + 11B)^2$ (56)

3) $(17A + 8B)\,(29A + 20B) = (13A + 22B)^2$.

Dann erhält man durch (55):

73. $(a + 9b - 10x)\,(a + 25b - 26x) = (a + 15b - 16x)^2$

74. $(a + 9b - 10x)\,(a + 49b - 50x) = (a - 21b + 20x)^2$

75. $(9a + 25b - 34x)(9a + 49b - 58x) = (9a - 35b + 26x)^2$

L. $x = a,\ b$.

Dafs die Gleichungen 72—75 auch richtig bleiben, wenn man a und b vertauscht, liegt auf der Hand.

Auch hier läfst sich leicht eine allgemeine Gleichung aufstellen, in welcher alle Gleichungen von der

Form (1) enthalten sind, welche die Wurzeln a und b haben. Macht man in der Formel III in d. die Substitution (55), so geht sie über in

$$(56)\quad \big((m-n)^2 a + (m+n)^2 b - 2(m^2+n^2)x\big) \cdot \big((p-q)^2 a + (p+q)^2 b - (p^2+q^2)x\big) = \big((m-n)(p-q)a + (m+n)(p+q)b - 2(mp+nq)x\big)^2$$

L. $x = a, b$.

Setzt man hierin der Kürze halber:

$$m - n = m_1 \qquad m + n = n_1$$
$$p - q = p_1 \qquad p + q = q_1, \text{ also auch}$$
$$2(m^2+n^2) = m_1^2 + n_1^2$$
$$2(p^2+q^2) = p_1^2 + q_1^2$$
$$2(mp+nq) = m_1 p_1 + n_1 q_1$$

und läſst schlieſslich den Index wieder fort, so erhält man als allgemeinste Gleichung von der Form (1) mit den Wurzeln a und b:

76. $$\big(m^2 a + n^2 b - (m^2+n^2)x\big)\big(p^2 a + q^2 b - (p^2+q^2)x\big) = \big(mpa + nqb - (mq+nq)x\big)^2$$

L. $x = a, b$.

Setzt man hierin $m = 3$, $n = 1$, $p = 3$, $q = 5$, so erhält man [87].

In der Gleichung 76 sind selbstverständlich auch die Gleichungen 72—75 enthalten; man hat die willkürlichen Gröſsen m, n, p und q nur in geeigneter Weise zu bestimmen.

Entwickelt man die Gleichung (56), so hebt sich der Faktor $4(mq - np)^2$ heraus, bei der Gleichung 76 der Faktor $(mq - np)^2$; damit fallen auch alle willkürlichen Gröſsen fort, und es bleibt in beiden Fällen nur die einfache Gleichung übrig, von der wir ausgegangen sind.

Es seien als Wurzeln der aufzustellenden Gleichung

$$2)\quad x_1 = 2a + b, \quad x_2 = a + 2b$$

gegeben. Dann hat man:

$$x^2 - (3a+3b)x + (2a+b)(a+2b) = 0$$
$$(2x - 3a - 3b)^2 = (a-b)^2.$$

Hieraus durch direkte Transformation nach (24_2) in leicht erklärlicher Weise mit Hülfe des Faktors 4:

$$(57)\quad \frac{2x - 3a - 3b}{a - b} = \frac{a - b}{2x - 3a - 3b}$$

$$\frac{2x - 3a - 3b}{2x - 7a + b} = \frac{a - b}{13a + 11b - 8x} = \frac{2x - 7a + b}{34x - 59a - 43b}, \text{ d. h.}$$

77. $(3a + 3b - 2x)(59a + 43b - 34x) = (2x - 7a + b)^2$

L. $x = 2a + b,\ a + 2b$. Vgl. $[108_2]$.

Für die Gleichung (57) ist

$$A = C = 2x - 3a - 3b, \quad B = a - b.$$

Man kann also zur Transformation die Formeln in (56) benutzen. Dann erhält man:

78. $(11a + 19b - 10x)(27a + 51b - 26x)$
$= (17a + 31b - 16x)^2$

79. $(11a + 19b - 10x)(51a + 99b - 50x)$
$= (19a + 41b - 20x)$

80. $(43a + 59b - 34x)(67a + 107b - 58x)$
$= (17a + 61b - 26x)^2$

L. $x = 2a + b,\ a + 2b$.

Die Gleichungen 77—80 bleiben auch richtig, wenn man a und b vertauscht.

Die Gleichungen 78—80 erhält man auch aus den Gleichungen 73—75, wenn man in diesen $2a + b$ und $a + 2b$ bezw. setzt statt a und b.

Überhaupt kann man aus quadratischen Gleichungen, welche die Wurzeln a und b haben, leicht andere Gleichungen derselben Art ableiten, welche beliebige Wurzeln haben, indem man diese bezw. statt a und b setzt.

Sind daher als Wurzeln der aufzustellenden Gleichungen

$$3)\quad x_1 = a + b, \quad x_2 = a - b$$

gegeben, so kann man in 73—75 nur $a + b$ statt a, $a - b$ statt b setzen. Man erhält

81. $(5x - 5a + 4b)(13x - 13a + 12b) = (8x - 8a + 7b)^2$

82. $(5x - 5a + 4b)(25x - 25a + 24b) = (10x - 10a + 11b)^2$

83. $(17x - 17a + 8b)(29x - 29a + 20b)$
$= (13x - 13a + 22b)^2$

L. $x = a + b,\ a - b$.

Sollen die Wurzeln der aufzustellenden Gleichungen

$$4)\quad x_1 = 2a - b,\ x_2 = 2b - a$$

sein, so hat man in 73—75 $2a - b$ statt a, $2b - a$ statt b zu setzen. Man erhält:

84. $(7a - 17b + 10x)(23a - 49b + 26x)$
$= (13a - 29b + 16x)^2$

85. $(7a - 17b + 10x)(47a - 97b + 50x)$
$= (23a - 43b + 20x)^2$

86. $(7a - 41b + 34x)(31a - 89b + 58x)$
$= (53a - 79b + 26x)^2$

L. $x = 2a - b,\ 2b - a$.

Dafs man die Gleichungen 81—86 auch direkt aufstellen kann, wie es mit den Gleichungen 72—75 und 77—80 geschehen ist, versteht sich von selbst.

Sollen, um auch ein Zahlenbeispiel zu nehmen, die Wurzeln der aufzustellenden Gleichungen 3 und 2 sein, so hat man in 73—75 nur 3 statt a, 2 statt b zu setzen. Das giebt:

87. $(21 - 10x)(53 - 26x) = (33 - 16x)^2$

88. $(21 - 10x)(101 - 50x) = (39 - 20x)^2$

89. $(77 - 34x)(125 - 58x) = (43 - 26x)^2$

L. $x = 3,\ 2$.

Man hätte auch ebenso gut 2 statt a, 3 statt b setzen können, und hätte drei andere Gleichungen mit denselben Wurzeln erhalten.

Die Gleichungen [113] bis [115] sind direkt aufgestellt. Die erste Wurzel ist vorher als gegeben angenommen. Das Quadrat erhält für diese Wurzel einen bestimmten Wert. Das Produkt ist dann so gebildet, dafs es für die angenommene Wurzel denselben Wert erhält. Dann hat die Gleichung eine rationale Wurzel. Daher mufs die andere Wurzel ebenfalls rationell sein. Näheres ist auch im folgenden Abschnitt angegeben bei den Erörterungen zur Aufgabe [111].

II. $A^2 + B^2 = C^2$.

12. $(x - a + 7b)^2 + 9(x + a + b)^2 = 4(x + 2a + 4b)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

12_1. $(2a - 2b + x)^2 + 4(a + 2b + x)^2 = (3a + 3b + 2x)^2$

L. $x = \sqrt{(a-b)(a + 11b)}$.

12_2. $(13a + 3b + 5x)^2 + 9(x - a + b)^2 = 4(7a + 3b + 2x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$.

Diese Gleichungen haben die Form

$$(1) \quad A^2 + B^2 = C^2.$$

Sie sind nur einfache Umformungen der Gleichungen, welche im vorigen Abschnitt behandelt sind. Es ist statt des Produkts von zwei Gröfsen die Differenz der Quadrate der halben Summe und der halben Differenz der Gröfsen gesetzt. So folgt aus der Gleichung

$$AC = B^2$$

sofort

$$\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-C}{2}\right)^2 = B^2$$

$$\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2, \text{ d. h.}$$

eine Gleichung von der Form (1).

So erhält man die Gleichung 12 aus [8] in I, nämlich

$$(a + 5b + x)(5a + b + x) = 3(a + b + x)^2$$

$$(3a + 15b + 3x)(5a + b + x) = 9(a + b + x)^2$$

$$(4a + 8b + 2x)^2 - (7b - a + x)^2 = 9(a + b + x)^2, \text{ d. h.}$$

$$(x - a + 7b)^2 + 9(x + a + b)^2 = 4(x + 2a + 4b)^2.$$

Ebenso ist die Gleichung 12_1 nur eine andere Form der Gleichung [9] in I. — Auch die Gleichung 12_2 ist in derselben Weise abgeleitet. — Dafs man so auch vollständige quadratische Gleichungen bilden kann, ist einleuchtend. So folgt aus der Gleichung 72 in I

1. $(2x - 3a + b)^2 + 16(a - x)^2 = (5a + b - 6x)^2$

L. $x = a, b$.

Setzt man in I. 76 $m = 1$, $n = 3$, $p = 5$, $q = 1$, so erhält man

$$(a + 9b - 10x)(25a + b - 26x) = (5a + 3b - 8x)^2.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich auf dem angegebenen Wege die Gleichung [87_1]

$$(5a + 3b - 8x)^2 + 16(2x - 3a + b)^2 = (13a + 5b - 18x)^2$$

L. $x = a, b$.

Die Gleichung [110] ist abgeleitet aus [108_2] oder aus 77 in I.

Die Gleichung [111] scheint direkt aufgestellt zu sein. Man wählt die Wurzel $x = 2a - b$ beliebig und formirt das erste Glied so, dafs es für diese Wurzel verschwindet. Dann sind die beiden andern Quadrate nur so zu wählen, dafs sie für die angegebene Wurzel einander gleich werden. Man nimmt das dritte Quadrat beliebig, z. B. $(a + b - 2x)^2$. Das geht für $x = 2a - b$ über in $9(a - b)^2$. Das kann man direkt als zweites Glied nehmen. Oder man nimmt allgemein als zweites Glied

$$(\alpha a + \beta b + \gamma x)^2.$$

Dann mufs dies Glied, wenn $x = 2a - b$ der Gleichung genügen soll, für diesen Wert von x übergehen in $(3a - 3b)^2$. Es mufs daher werden

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \alpha + 2\gamma = 3 \\ \gamma - \beta = 3 \end{bmatrix}.$$

Setzt man $\gamma = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = -3$, so erhält man die angeführte Gleichung. Setzt man jedoch weiter

$\gamma = \quad 1, \quad 3, \quad 4, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad -4,$

und daher nach (2) entsprechend

$\alpha = \quad 1, \quad -3, \quad -5, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11$

$\beta = -2, \quad 0, \quad 1, \quad -4, \quad -5, \quad -6, \quad -7,$

so erhält man bezw. folgende Gleichungen:

2. $(2a - b - x)^2 + (a - 2b + x)^2 = (a + b - 2x)^2$

L. $x = 2a - b,\ 2b - a$.

3. $(2a - b - x)^2 + (3a - 3x)^2 = (a + b - 2x)^2$

L. $x = 2a - b,\ a$.

4. $(2a - b - x)^2 + (5a - b - 4x)^2 = (a + b - 2x)^2$
L. $x = 2a - b,\ \frac{1}{13}(14a - b)$.

5. $(2a - b - x)^2 + (5a - 4b - x)^2 = (a + b - 2x)^2$
L. $x = 2a - b,\ 8b - 7a$.

6. $(2a - b - x)^2 + (2x - 7a + 5b)^2 = (a + b - 2x)^2$
L. $x = 2a - b,\ 26a - 25b$.

7. $(2a - b - x)^2 + (3x - 9a + 6b)^2 = (a + b - 2x)^2$
L. $x = 2a - b,\ 7a - 6b$.

8. $(2a - b - x)^2 + (4x - 11a - 7b)^2 = (a + b - 2x)^2$
L. $x = 2a - b,\ \frac{1}{13}(62a - 49b)$.

Da eine Wurzel rational ist, so mufs auch die andere rational sein. Weifs man die eine Wurzel, so ist die andere nach [105] leicht hinzuschreiben. Man bringt am einfachsten das dritte Quadrat nach links und verwandelt die Differenz dieses Quadrats mit dem zweiten in ein Produkt; dann mufs dies Produkt einen Faktor $2a - b - x$ haben. Hebt man die Gleichung durch diesen, so giebt der übrigbleibende Teil der Gleichung die andere Wurzel.

Auch von Gleichungen dieser Art lassen sich für bestimmte Wurzeln leicht allgemeine Gleichungen aufstellen, die alle besonderen Gleichungen von der Form (1) in sich fassen, welche die angegebenen Wurzeln haben. Diese allgemeinen Gleichungen sind jedoch alle von zu komplicirter Form und daher auch ohne besonderes Interesse. Will man Gleichungen von der Form (1) aufstellen, so ist es am einfachsten, Gleichungen von der in I behandelten Form aufzustellen und aus diesen Gleichungen von der hier behandelten Form abzuleiten.

Da sich die in I behandelten Gleichungen leicht auf die Form der hier behandelten Gleichungen bringen lassen, so läfst sich auch alles was dort über die Gleichungen von der Form

$$A^2 = B^2$$

gesagt ist, auf Gleichungen von der Form

$$A^2 + B^2 = C^2$$

übertragen; wir können die hier vorkommenden vollständigen quadratischen Gleichungen, z. B. [87_1] und [110], keinen Zusammenhang mit den symmetrischen Gleichungen des 4. Grades haben, weil aus diesen nur reine quadratische Gleichungen abgeleitet sind.

III. $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$.

13. $(3a + 3b - x)^2 + (x - 3a + 3b)^2$
$= (a + b - 3x)^2 + (3x - a + b)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

13_1. $(2x - 3a + 4b)^2 + (2x + 11a + 2b)^2$
$= (x - 8a + 3b)^2 + (3x + 8a + 3b)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

13_2. $(3x - 4a + 3b)^2 + (2x + a)^2$
$= (x - 4a + b)^2 + (2x - 3a + 4b)^2$

L. $a = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

a. Diese Gleichungen haben die Form

$$(1) \quad A^2 + B^2 = C^2 + D^2.$$

Sie sind Transformationen von Gleichungen, welche die Form der Gleichungen [18—28] *) haben: Die Quotientengleichung [18] z. B. läfst sich auch als Produktengleichung schreiben:

$$(2) \quad (x+a+2b)(b+2a-2x)=(x+a-2b)(b-2a+2x).$$

Stellt man nun jedes Produkt als Differenz zweier Quadrate dar, so erhält man

$$(3a+3b-x)^2-(3x-a+b)^2=(a+b-3x)^2-(x-3a+3b)^2.$$

Vertauscht man das zweite und vierte Quadrat mit einander, so erhält man die oben aufgeführte Gleichung 13.

b. Soll die aufzustellende Gleichung in jedem Gliede x enthalten, so darf x in den links oder in den rechts stehenden Faktoren der Produktengleichung, oben in (2), nicht dieselben Koefficienten haben. Sonst mufs sich das x wegen der Addition und Subtraktion der Faktoren bei der Bildung

---

*) s. weiter unten Abschnitt IV.

der Quadrate fortheben. Hat man z. B. die Quotientengleichung [20]

$$(3)\quad \frac{x+5a+b}{x-3a+b} = \frac{x-a+b}{a-x+3b}, \quad \text{L. } x = \sqrt{a^2+10ab+b^2},$$

so folgt aus derselben

$$(x+5a+b)(a-x+3b) = (x-a+b)(x-3a+b)$$
$$(3a+2b)^2 - (x+2a-b)^2 = (x-2a+b)^2 - a^2$$
$$(3a+2b)^2 + a^2 = (x+2a-b)^2 + (x-2a+b)^2,$$

d. h. eine Gleichung von der hier verlangten Form, in welcher jedoch zwei Glieder kein x enthalten. In der aus (3) abgeleiteten Produktengleichung haben die Glieder mit x in den Faktoren gleiche Koefficienten. Will man daher die Quotientengleichung (3) zur Herstellung einer Gleichung von der hier verlangten Form benutzen, so mufs man sie nach dem KS. erst umformen. Man erweitert einen Quotienten, z. B. den ersten, mit einer beliebigen Zahl, etwa mit 4, und wendet den KS. mit Addition an, so erhält man aus den beiden Quotienten in (3) einen dritten gleichwertigen Quotienten und daher die Gleichung

$$(4)\quad \frac{x+5a+b}{x-3a+b} = \frac{5x+19a+5b}{3x-11a+7b}, \text{ also}$$

$$(x+5a+b)(3x-11a+7b) = (5x+19a+5b)(x-3a+b)$$
$$(2x-3a+4b)^2 - (x-8a+3b)^2$$
$$= (3x+8a+3b)^2 - (2x+11a+2b)^2$$

u. s. w. Man kommt auf die Gleichung 13_1.

Man kann auch auf (3) direkt den KS. mit Addition anwenden, um einen dritten gleichwertigen Quotienten zu bilden. Das giebt

$$\frac{x+5a+b}{x-3a+b} = \frac{2x+4a+2b}{4b-2a}$$

$$(x+5a+b)(4b-2a) = (2x+4a+2b)(x-3a+b).$$

Hieraus nach dem angegebenen Verfahren:

1. $(x+3a+5b)^2 + (x+7a+b)^2$
$$= (3x+a+3b)^2 + (x+7a-3b)^2$$
L. $x = \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Noch einfacher multiplicirt man in der oben angeführten, als nicht ganz geeignet befundenen Produktengleichung bei (3) einen Faktor links und einen rechts mit einer beliebigen Zahl, z. B. den ersten und dritten Faktor mit 2. Das giebt $(2x+10a+2b)(a-x+3b)=(2x-2a+2b)(x-3a+b)$, d. h.

2. $(x + 11a + 5b)^2 + (x + a + b)^2$

$$= (3a - 5a + 3b)^2 + (3x + 9a - b)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Ähnlich, wie man aus (3) die Gleichung (4) und aus dieser die Gleichung 13_1 ableitet, kann man aus [26]

$$\frac{a+b-x}{3a-b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-5b+x}, \text{ L. } x = \sqrt{a^2 - ab + b^2},$$

indem man den ersten Quotienten mit 2 erweitert und den KS. mit Addition anwendet, zunächst bilden

$$\frac{a+b-x}{3a-b-3x} = \frac{5a-b+x}{7a-7b-5x}.$$

Hieraus

$(a+b-x)(7a-7b-5x)=(5a-b+x)(3a-b-3x)$ u. s. w.

Man kommt so auf die Gleichung 13_2.

Was daher im folgenden Abschnitt über die Gleichungen von der Form [18—28] gesagt ist, läfst sich leicht auf Gleichungen von der hier behandelten Form übertragen.

c. Auch jede beliebige **vollständige quadratische Gleichung** läfst sich leicht auf die hier behandelte Form bringen, da sie sich leicht als Quotientengleichung darstellen läfst.

Es seien als Wurzeln der Gleichung

$$x_1 = a, \quad x_2 = b$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2 - (a+b)\,x + ab = 0$$

$$x(a+b-x) = ab$$

$$(5) \quad \frac{x}{a} = \frac{b}{a+b-x}.$$

Nach dem KS. folgt hieraus in leicht erklärlicher Weise

$$(6) \quad \frac{2x+b}{3a+b-x} = \frac{2x+3b}{5a+3b-3x}$$

$$(2x+b)(5a+3b-3x) = (2x+3b)(3a+b-x)$$

und hieraus nach dem oben angegebenen Verfahren

$$(7)\quad (5a + 4b - x)^2 + (3x - 3a + 2b)^2 = (3a + 4b + x)^2 + (5a + 2b - 5x)^2$$

L. $x = a, b$. Vgl. [87_2.]

Die zur Herleitung von (6) aus (5) angewendeten Faktoren 2 und 3 waren beliebig. Man kann auch allgemein aus (5) nach dem KS. bilden

$$\frac{mx + bn}{am + (a + b - x)n} = \frac{px + bq}{ap + (a + b - x)q}$$

und hat daher die Produktengleichung

$$(mx + bn)\big(ap + (a + b - x)q\big) = (px + bq)\big(am + (a + b - x)n\big)$$

L. $x = a, b$.

Aus dieser Gleichung folgt nach dem oben schon mehrmals angewendeten Verfahren

$$(8)\quad \big((p + q)\,a + (n + q)\,b + (m - q)\,x\big)^2 + \big((m + n)\,a + (n - q)\,b - (n + p)\,x\big)^2$$
$$= \big((m + n)\,a + (n + q)\,b - (n - p)\,x\big)^2 + \big((p + q)\,a - (n - q)\,b - (m + q)\,x\big)^2$$

L. $x = a, b$.

Dies ist die allgemeine Gleichung, die alle quadratischen Gleichungen von der Form (1) in sich schliefst, welche die Lösung $x = a, b$ haben.

Die Gröfsen m, n, p und q sind willkürlich. Entwickelt man, so müssen sich dieselben alle wieder fortheben, und man kommt auf die einfache quadratische Gleichung wieder zurück, von der wir ausgegangen sind.

Für die oben aufgestellte Gleichung (7) ist $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 3$. Setzt man weiter noch für m, n, p und q bezw. 1) 1, 2, 3, 4; 2) 2, 1, 3, 4; 3) 1, 2, 4, 3; 4) 3, 1, 4, 2, so erhält man aus (8):

3. $(7a + 6b - 3x)^2 + (3a - 2b - 5x)^2$
$= (3a + 6b + x)^2 + (7a + 2b - 5x)^2$

4. $(7a + 5b - 2x)^2 + (3a - 3b - 4x)^2$
$= (3a + 5b + 2x)^2 + (7a + 3b - 6x)^2$

$$(7a + 5b - 2x)^2 + (3a - b - 6x)^2$$
$$= (3a + 5b + 2x)^2 + (7a + b - 4x)^2$$
$$(7a + 3b + x)^2 + (4a - b - 6x)^2$$
$$= (4a + 3b + 4x)^2 + (7a + b - 5x)^2$$

L. $x = a,\ b$.

Aus den hier entwickelten Gleichungen, welche die Wur-
ln a und b haben, kann man wieder Gleichungen von der-
lben Form ableiten, welche beliebige andere Wurzeln haben.
lan hat statt a und b nur die Gröfsen zu setzen, welche die
Vurzeln der zu bildenden Gleichung sein sollen.

Setzt man in (7) $a + b$ statt a, $a - b$ statt b, so er-
ält man [110$_1$]

$$9a + b - x)^2 + (a + 5b - 3x)^2 = (7a - b + x)^2 + (7a + 3b - 5x)^2$$

L. $x = a + b,\ a - b$.

Setzt man in (7) $2a + b$ statt a, $a + 2b$ statt b, so
hält man

$$(14a + 13b - x)^2 + (3x - 4a + b)^2$$
$$= (10a + 11b + x)^2 + (12a + 9b - 5x)^2$$

L. $x = 2a - b,\ a + 2b$.

IV. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

$\frac{x + a + 2b}{x + a - 2b} = \frac{b - 2a + 2x}{b + 2a - 2x}$ L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$\frac{a + 4b + x}{a - 4b + x} = \frac{3b - a + x}{3b + a - x}$ L. $x = \sqrt{a^2 + 12b^2}$.

$\frac{x + 5a + b}{x - 3a + b} = \frac{x - a + b}{a - x + 3b}$ L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

$\frac{a - 7b + x}{7a - b - x} = \frac{a + 5b + x}{b + 5a + x}$ L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

$\frac{3a - b - x}{a - 3b + x} = \frac{5b - 3a + x}{5a - 3b + x}$ L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

$\frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - a + 2b}{3x - 3a + 2b}$ L. $x = \sqrt{a(a - b)}$.

24. $\frac{3a-2b+3x}{a-2b+x} = \frac{x-7a+8b}{3x-5a+4b}$ L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

25. $\frac{5a-6b+x}{a+x} = \frac{3a-5b+3x}{a+b+x}$ L. $x = \sqrt{(a-b)(a+3b)}$.

26. $\frac{a+b-x}{3a-b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-5b+x}$ L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

27. $\frac{7a+b-x}{5a+3b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-17b+x}$ L. $x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

28. $\frac{5a-b+x}{2(a+2b-x)} = \frac{2(2a-b+x)}{a+11b-x}$ L. $x = \sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$.

a. Auch diese Gleichungen, welche die Form

$$(1)\quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

haben, lassen sich leicht direkt aufstellen. Man hat die Koefficienten von a, b und x nur so zu wählen, dafs sich bei der Entwickelung die Glieder mit ax und bx fortheben. Aber man wird so, wie bei den im ersten Abschnitt behandelten Gleichungen, meistens auf Gleichungen kommen, welche unzierliche Resultate liefern.

Den eigentlichen Schlüssel für die Aufstellung dieser Gleichungen bilden ebenfalls die symmetrischen Gleichungen des 4. Grades. Man hat nur zwei aus einer solchen Gleichung entwickelte Darstellungen von t einander gleich und x statt r zu setzen und zu quadriren, so erhält man sofort eine Gleichung von der hier behandelten Art.

So sind nach [II. 233] aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grades

$$\frac{(x^2+y^2)(x^2-xy+y^2)}{x^4+y^4} = \frac{a}{b}$$

als Darstellungen von t gefunden oder können nach Ec. leicht entwickelt werden:

1. $\sqrt{\frac{r-3a+2b}{a-b}}$ 2. $\sqrt{\frac{3b-a}{3a-2b+r}}$ 3. $\sqrt{\frac{r-4a+5b}{r+4a-3b}}$

4. $\sqrt{\frac{2a+b-r}{2a-b+r}}$ 5. $\sqrt{\frac{7b-r}{8a-5b+3r}}$ 6. $\sqrt{\frac{8a-3b-3r}{b+r}}$

$$r = \sqrt{8a^2 - 8ab + b^2}.$$

Hier kann man irgend zwei dieser Darstellungen einander gleich und x statt r setzen. So hat man:

1. $\frac{x - 3a + 2b}{a - b} = \frac{3b - a}{x + 3a - 2b}$ aus 1. und 2.

2. $\frac{x - 4a + 5b}{x + 4a - 3b} = \frac{2a + b - x}{2a - b + x}$ aus 3. und 4.

3. $\frac{7b - x}{8a - 5b + 3x} = \frac{8a - 3b - 3x}{b + x}$ aus 5. und 6.

Alle drei Gleichungen sind rein quadratisch und müssen, da x statt r gesetzt ist, die gemeinsame Lösung haben

$$x = \sqrt{8a^2 - 8ab + b^2}.$$

Setzt man die beiden ersten Darstellungen von t, die oben bei (11) in I zur symmetrischen Gleichung des vierten Grades (α_2) gefunden sind, einander gleich und x statt r, so erhält man die Gleichung 18.

Setzt man die beiden ersten Darstellungen von t bei (7) in I einander gleich und x statt r, so erhält man

4. $\frac{3a + 2b + 3x}{3a - 2b + 3x} = \frac{3b - 2a + 2x}{3b + 2a - 2x}$, L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ebenso ergiebt sich die Gleichung 21 aus der 3. und 4. Darstellung von t in [II. 298], wenn man $-x$ statt r setzt.

In derselben Weise ergiebt sich die Gleichung 22 aus der 3. und 4. Darstellung von t in [II. 305].

b. Die Form der Gleichungen 18—28 ist noch unbestimmter, als die Form der in I behandelten Gleichungen. Wenn schon die Zahl der im 1. Abschnitt behandelten Gleichungen für eine bestimmte Lösung unendlich ist, so mufs die Zahl der Gleichungen von der hier behandelten Form für eine bestimmte Lösung erst recht unendlich sein. Hat man eine Gleichung dieser Art aufgestellt, so kann man aus derselben durch korr. Addition oder mit Hülfe des KS. beliebig viele andere ableiten, welche alle dieselbe Form und dieselbe Lösung haben.

$$\text{IV b.}\quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

So folgt aus (1) durch korr. Add. allgemein

$$\text{I.}\quad \frac{mA + nB}{pA + qB} = \frac{mC + nD}{pC + qD},$$

oder nach dem KS.

$$\text{II.}\quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{mA + nC}{mB + nD} = \frac{pA + qC}{pB + qD},$$

wo m, n, p und q willkürliche Gröfsen sind. Man kann jedoch in die Gleichung, ohne die Form zu ändern, noch vier andere willkürliche Gröfsen hineinbringen, indem man auf I den KS. oder auf II korr. Addition anwendet. So folgt aus II durch korr. Add.

$$\text{III.}\quad \frac{m_1(mA + nC) + n_1(mB + nD)}{p_1(mA + nC) + q_1(mB + nD)} = \frac{m_1(pA + qC) + n_1(pB + qD)}{p_1(pA + qC) + q_1(pB + qD)}.$$

Diese Gleichung enthält 8 willkürliche Gröfsen: m, n, p, q, m_1, n_1, p_1 und q_1.

Die Gleichungen I, II und III haben dieselbe Form und dieselbe Lösung, wie die Gleichung (1). Entwickelt man dieselben, so müssen sich alle willkürlichen Gröfsen wieder fortheben, und es bleibt nur die Gleichung (1) oder $AD = BC$. In I und in II hebt sich bei der Entwickelung der Faktor $mq - np$, in III der Faktor $(mq - np)(m_1q_1 - n_1p_1)$ fort.

Auch aus der Theorie der Determinanten ergeben sich die Gleichungen I, II und III sehr leicht. Die Gleichung (1) heifst, als Determinante geschrieben,

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = 0.$$

Diese kann man mit dem konstanten Faktor

multipliciren. Das giebt $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Am + Cn & Ap + Cq \\ Bm + Dn & Bp + Dq \end{vmatrix} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Nehmen wir, um an einem Beispiele die Mannigfaltigkeit solcher Gleichungen zu zeigen, die oben angeführte Gleichung 18, so ist nach II eine allgemeine Form derselben

$$\frac{(x + a + 2b)m + (b - 2a + 2x)n}{(x + a - 2b)m + (b + 2a - 2x)n} = \frac{(x + a + 2b)p + (b - 2a + 2x)q}{(x + a - 2b)p + (b + 2a - 2x)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Setzt man hierin ganz beliebig für die willkürlichen Gröfsen m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, — 1; 2) 3, 1, 1, 4; 3) 1, 2, 1, 3; 4) 2, 3, 1, 4, so erhält man:

5. $$\frac{3b - a + 3x}{3a - b - x} = \frac{3a + b - x}{3x - a - 3b}$$

6. $$\frac{5x + a + 7b}{x + 5a - 5b} = \frac{6b - 7a + 9x}{9a + 2b - 7x}$$

7. $$\frac{5x - 3a + 4b}{5a - 3x} = \frac{7x - 5a + 5b}{7a + b - 5x}$$

8. $$\frac{8x - 4a + 7b}{8a - b - 4x} = \frac{9x - 7a + 6b}{9a + 2b - 7x} \text{ u. s. w.}$$

Die gemeinschaftliche Lösung ist, wie in 18,

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

c. Will man ähnlich, wie es für die im 1. Abschnitt behandelten Gleichungen dort in e. geschehen ist, für eine vorher bestimmte Lösung eine symmetrische Gleichung des 4. Grades aufstellen, aus welcher man Gleichungen von der hier behandelten Form ableiten kann, welche die angegebene Lösung haben, so mufs man von der Gleichung ausgehen, welche durch die Lösung gegeben ist.

So hat man in Ie. bei 2) für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$$

die symmetrische Gleichung des 4. Grades entwickelt

$$\frac{(x^2 - 4xy + y^2)(x - y)^2}{2xy(x + y)^2} = \frac{a}{b}$$

und für diese bei (36) einige Darstellungen von t. Aus den beiden ersten ergiebt sich die Gleichung

9. $$\frac{a + 5b + x}{a + b + x} = \frac{a - 7b + x}{3a - b - x}, \quad \text{L. } x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Aus dieser Gleichung kann man nach den Formeln I, II und III oder direkt durch korr. Add. oder nach dem KS. wieder unendlich viele andere Gleichungen ableiten, welche dieselbe Form und dieselbe Lösung haben.

Dafs man so zu unendlich vielen verschiedenen symmetrischen Gleichungen des 4. Grades gelangen kann, welche alle auf dasselbe r und folglich auf unendlich viele quadratische Gleichungen mit derselben Lösung führen, ist dort in e. gezeigt worden.

Wie man zu verfahren hat, wenn man eine symmetrische Gleichung des 4. Grades aufstellen will, welche direkt auf eine bestimmte quadratische Gleichung von der hier behandelten Form führt, ist aus If. zu ersehen.

Nimmt man, um auch hier ein Beispiel durchzuführen, die Gleichung 26

$$\frac{a+b-x}{3a-b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-5b+x}, \quad \text{L. } x = \sqrt{a^2-ab+b^2},$$

so hat man r statt x zu setzen und diese Quotienten als Darstellungen von $t^2 = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$ anzusehen. Man hat also zu setzen

$$\frac{a+b-r}{3a-b-3r} = \frac{3(a-b+r)}{a-5b+r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2,$$

aus dieser Gleichung r zu eliminiren und $\frac{a}{b}$ zu bestimmen. Das giebt:

$$\frac{5a-4b+4r}{3a-8b} = \frac{3a}{5a-4b-4r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

$$\left|\begin{array}{l} 5a-4b+4r = (3a-8b)\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 \\ 5a-4b-4r = 3a\cdot\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \end{array}\right|.$$

Hieraus durch Addition:

$$5a-4b = 3a\cdot\frac{x^4+6x^2y^2+y^4}{(x^2-y^2)^2} - 4b\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

$$\frac{8xy(x+y)^2}{14x^2y^2-x^4-y^4} = \frac{a}{b},$$

die gesuchte symmetrische Gleichung des 4. Grades. Man erhält als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{2r+a-2b}{2r-a-2b}} = \sqrt{\frac{2a-b+r}{2a-3b-r}} = \sqrt{\frac{3(a-b+r)}{a-5b+r}} = \sqrt{\frac{a+b-r}{3a-b-3r}},$$

$$r = \sqrt{a^2-ab+b^2}.$$

Die 3. und 4. Darstellung folgen aus den beiden ersten nach dem KS. durch Addition und Subtraktion. Setzt man die

3. und 4. Darstellung einander gleich und x statt r, so erhält man die Gleichung 26, von der wir ausgegangen sind.

d. Will man direkt aus einer gegebenen Lösung Gleichungen von der hier behandelten Form ableiten, so verfährt man ähnlich, wie es in Ig. für die Gleichungen von der dort behandelten Form geschehen ist; nur ist hier die Aufstellung der Gleichungen leichter, weil die Form weniger bestimmt ist. Man hat die durch die Lösung gegebene Gleichung nur in eine Quotientengleichung zu verwandeln, was immer sehr einfach ist. Will man dann aus der gefundenen Quotientengleichung andere durch Transformation ableiten, so ist das hierzu erforderliche Verfahren in b. angegeben. Ein paar Beispiele werden genügen.

Es sei nach der Gleichung 18 oben als Lösung

$$1) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 - a^2 = b^2$$

$$(2) \quad \frac{x + a}{b} = \frac{b}{x - a}.$$

Damit ist die Aufgabe schon gelöst. Multiplicirt man im Nenner mit 2, so hat man durch korr. Addition

$$\frac{x + a + 2b}{x + a - 2b} = \frac{b + 2x - 2a}{b - 2x + 2a} \quad [18].$$

Oder man hat aus (2) allgemein nach dem KS.

10. $\frac{(x + a)m + bn}{bm + (x - a)n} = \frac{(x + a)p + bq}{bp + (x - a)q}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aus dieser Gleichung kann man beliebig viele andere hinschreiben, indem man für die willkürlichen Gröfsen beliebige Zahlen setzt. Aus jeder so gewonnenen Gleichung kann man durch korr. Add. wieder beliebig viele andere ableiten. Setzt man z. B. $m = 3$, $n = -1$, $p = 1$, $q = -2$, so erhält man

11. $\frac{3a - b + 3x}{a + 3b - x} = \frac{a - 2b + x}{2a + b - 2x}$, L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Hieraus allgemein durch korr. Add.

12. $\frac{(3a - b + 3x)m_1 + (a + 3b - x)n_1}{(3a - b + 3x)p_1 + (a + 3b - x)q_1} = \frac{(a - 2b + x)m_1 + (2a + b - 2x)n_1}{(a - 2b + x)p_1 + (2a + b - 2x)q_1}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Setzt man hierin für m_1, n_1, p_1 und q_1 bezw. 1) $1, 1, 1, -1$; 2) $1, 2, 2, 1$; 3) $3, 2, 3, -1$, so erhält man:

13. $\frac{2a + b + x}{a - 2b + 2x} = \frac{b - 3a + x}{a + 3b - 3x}$

14. $\frac{5a + 5b + x}{7a + b + 5x} = \frac{5a - 3x}{4a - 3b}$

15. $\frac{11a + 3b + 7x}{8a - 6b + 10x} = \frac{7a - 4b - x}{a - 7b + 5x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Soll die Lösung nach der Gleichung 20 oben

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$$

sein, so hat man

$$x^2 = (5a + b)^2 - 24a^2$$

$$(5a + b)^2 - x^2 = 24a^2$$

$$(3) \quad \frac{5a + b + x}{8a} = \frac{3a}{5a + b - x}.$$

Damit ist die Aufgabe schon gelöst. Will man gerade die Gleichung 20 haben, so mufs man aus (3) weiter bilden:

$$\frac{5a + b + x}{b - 3a + x} = \frac{3a}{x - 2a - b} = \frac{b - a + x}{a + 3b - x}.$$

Die beiden ersten Quotienten sind aus (3) durch korr. Subtr. entstanden. Der dritte Quotient ist aus den beiden ersten nach dem KS. mit Subtr. abgeleitet, nachdem der zweite mit 2 erweitert ist. Die Gleichsetzung des ersten und dritten Quotienten giebt die Gleichung 20.

Man hätte aus 2) auch so schliefsen können:

$$x^2 = (a - b)^2 + 12ab$$

$$x^2 - (a - b)^2 = 12ab$$

$$\frac{x + a - b}{3b} = \frac{4a}{x - a + b} \text{ u. s. w.}$$

Soll die Lösung nach der Gleichung 23

$$3) \quad x = \sqrt{a(a-b)}$$

sein, so hat man

$$x^2 = a(a-b)$$

$$(4) \quad \frac{x}{a-b} = \frac{a}{x}.$$

Nach dem KS. folgt hieraus durch Addition und Subtraktion

$$\frac{a+x}{x+a-b} = \frac{a-x}{x-a+b}.$$

Multiplicirt man im Nenner mit 2, so erhält man durch einfache korr. Addition

$$\frac{3x+3a-2b}{a-2b+x} = \frac{x-a+2b}{3x-3a+2b}. \quad [23]$$

Man kann aus (4) auch zunächst durch korr. Add. beliebig speciell bilden

16. $\frac{3x+2a-2b}{2x-3a+3b} = \frac{3a+2x}{2a-3x}$, L. $x = \sqrt{a(a-b)}$.

Hieraus nach dem KS. allgemein

17. $\frac{(3x+2a-2b)m+(3a+2x)n}{(2x-3a+3b)m+(2a-3x)n} = \frac{(3x+2a-2b)p+(3a+2x)q}{(2x-3a+3b)p+(2a-3x)q}$

L. $x = \sqrt{a(a-b)}$.

Setzt man hierin für m, n, p, q bezw. 1) 1, 2, 2, 1; 2) 2, -1, -1, 3; 3) 3, 1, 2, 3, so erhält man

18. $\frac{8a-2b+7x}{a+3b-4x} = \frac{8x+7a-4b}{x-4a+6b}$

19. $\frac{4x+a-4b}{7x-8a+6b} = \frac{7a+2b+3x}{9a-3b-11x}$

20. $\frac{11x+9a-6b}{3x-7a+9b} = \frac{13a-4b+12x}{6b-5x}$

L. $x = \sqrt{a(a-b)}$.

Soll die Lösung

$$4) \quad x = \pm 5$$

sein, so hat man

$$x^2 = 25$$

$$\frac{x}{5} = \frac{5}{x}.$$

Hieraus nach dem KS., nachdem die Quotienten bezw. 1) mit a und b, 2) mit c und $-d$ erweitert sind,

$$(5)\quad \frac{x}{5} = \frac{5}{x} = \frac{ax + 5b}{5a + bx} = \frac{cx - 5d}{5c - dx}.$$

Man kann also aufstellen

21. $\dfrac{ax + 5b}{5a + bx} = \dfrac{cx - 5d}{5c - dx}$

L. $x = \pm 5$.

Erweitert man den ersten Quotienten in (5) mit m, den zweiten mit n, und verbindet nach dem KS. den ersten mit dem dritten, den zweiten mit dem vierten Quotienten, so erhält man zwei neue gleichwertige Quotienten und daher die Gleichung

22. $\dfrac{ax + 5b + mx}{5a + bx + 5m} = \dfrac{cx - 5d + 5n}{5c - dx + nx}$

L. $x = \pm 5$.

Die sechs Gröſsen a, b, c, d, m, n sind willkürlich, können also beliebig gewählt werden. Sie müssen sich bei der Entwickelung alle wieder herausheben.*)

e. Daſs man auch jede vollständige quadratische Gleichung in unendlich vielfacher Weise auf die hier behandelte Form (1) bringen kann, ist nach dem Obigen und nach Ii. leicht einzusehen.

Es seien als Wurzeln der aufzustellenden Gleichung gegeben

$$1)\quad x_1 = a, \quad x_2 = b.$$

Dann hat man

$$x^2 - (a + b)\,x + ab = 0$$

$$x(a + b - x) = ab$$

$$(6)\quad \frac{a + b - x}{a} = \frac{b}{x}.$$

---

*) Um die Gleichung aufzulösen, wendet man einfachsten korr. Addition an. Dann erscheinen die Faktoren $x + 5$ und $x - 5$, man hat also 1) $x + 5 = 0$, 2) $x - 5 = 0$ u. s. w.

aus hat man nach dem KS. zunächst die allgemeine chung

$$\frac{(a+b-x)m+bn}{am+nx} = \frac{(a+b-x)p+bq}{ap+qx}$$

L. $x = a, b$.

Hierin kann man für m, n, p und q beliebige Zahlen n. Die Gleichungen werden jedoch etwas einförmig, da ähler überall $a - x$ und im Nenner kein b vorkommen . Um eine solche Einförmigkeit zu vermeiden, kann man bei (2) und (4) verfahren, oder man mufs die Formel III nden. Im letzteren Falle ist nach (6) und (1)

$$A = a + b - x, \quad B = a, \quad C = b, \quad D = x.$$

man dann für die willkürlichen Gröfsen m, n, p, q, n_1, p_1 und q_1, bezw. 1) 3, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 2; 2) 1, 2, 3, 4, 4, 1; 3) 2, 1, 3, 1, 3, 2, 1, 4, so giebt das:

$$\frac{15a+8b-3x}{9a+4b-x} = \frac{5a+4b+x}{3a+2b+x} \quad [87_3]$$

$$\frac{5a+6b-4x}{5a+12b+2x} = \frac{15a+14b+6x}{15a+28b-8x} \quad [87_4]$$

$$\frac{10a+9b-4x}{10a+3b+2x} = \frac{15a+12b-7x}{15a+4b+x} \quad \text{u. s. w.}$$

L. $x = a, b$.

Einfacher verfährt man, wie bei (2) und (4). Durch . Addition bildet man zunächst aus (6) beliebig die spe- e Gleichung

$$\frac{3a+b-x}{a-b+x} = \frac{2x+b}{2x-b}.$$

aus folgt nach dem KS. die allgemeine Gleichung

$$\frac{(3a+b-x)m+(2x+b)n}{(a-b+x)m+(2x-b)n} = \frac{(3a+b-x)p+(2x+b)q}{(a-b+x)p+(2x-b)q}$$

L. $x = a, b$.

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 2; ., 3, 3, 1; 3) 2, 3, 3, -2, so erhält man:

28. $\frac{3a + 2b + x}{a - 2b + 3x} = \frac{3a + 3b + 3x}{a - 3b + 5x}$

29. $\frac{3a + 4b + 5x}{a - 4b + 7x} = \frac{9a + 4b - x}{3a - 4b + 5x}$

30. $\frac{6a + 5b + 4x}{2a - 5b + 8x} = \frac{9a + b - 7x}{3a - b - x}$

L. $x = a, b$.

Aus den Gleichungen 23—30, deren Zahl sich leicht beliebig vermehren läfst, welche alle die Wurzeln a und b haben, lassen sich nun wieder beliebig viele Gleichungen von derselben Form mit anderen Wurzeln bilden. Man hat in den aufgestellten Gleichungen nur statt a und b diese Wurzeln zu setzen.

Sollen die Wurzeln der aufzustellenden Gleichungen z. B.

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2$$

sein, so hat man 3 statt a, 2 statt b zu setzen. Man erhält dann aus den Gleichungen 24—26:

31. $\frac{61 - 3x}{35 - x} = \frac{23 + x}{13 + x}$

32. $\frac{27 + 4x}{39 - 2x} = \frac{73 + 6x}{101 - 8x}$

33. $\frac{24 - 2x}{18 + x} = \frac{69 - 7x}{53 + x}$ u. s. w.

L. $x = 3, 2$.

Sollen die Wurzeln

$$x_1 = 2a - b, \quad x_2 = 2b - a$$

sein, so ist $2a - b$ statt a, $2b - a$ statt b zu setzen. Man erhält so aus den Gleichungen 24—26:

34. $\frac{22a + b - 3x}{14a - b - x} = \frac{6a + 3b + x}{4a + b + x}$

35. $\frac{4a + 7b + 4x}{19b - 2a - 2x} = \frac{16a + 13b + 6x}{2a + 41b - 8x}$

36. $\frac{11a + 8b - 4x}{17a - 4b + 2x} = \frac{18a + 9b - 7x}{26a - 7b + x}$ u. s. w.

L. $x = 2a - b, \; 2b - a$.

Für die Wurzeln $a + b$ und $a - b$ erhält man aus den
eichungen 24—26:

$$\frac{23a + 7b - 3x}{13a + 5b - x} = \frac{9a + b + x}{5a + b + x}$$

$$\frac{11a - b + 4x}{17a - 7b - 2x} = \frac{29a + b + 6x}{43a - 13b - 8x}$$

$$\frac{19a + b - 4x}{13a + 7b + 2x} = \frac{27a + 3b - 7x}{19a + 11b + x}$$

L. $x = a + b, \quad a - b$.

Soll die Lösung $x = \pm a$ sein, so ist nur $-a$ statt b
setzen. Man erhält aus denselben Gleichungen:

$$\frac{7a - 3x}{5a - x} = \frac{a + x}{a + x}$$

$$\frac{4x - a}{2x + 7a} = \frac{6x + a}{8x + 13a}$$

$$\frac{a - 4x}{7a + 2x} = \frac{3a - 7x}{11a + x}$$

L. $x = \pm a$.

Die Gleichung [112], welche ihrer Form nach hierher
hört, scheint direkt aufgestellt zu sein. Man wählt das
odukt links und die Wurzel $x = a - b$ beliebig. Das
odukt links erhält für diesen Wert von x den Wert
$(a + c)$. Das Produkt rechts ist so zu wählen, dafs es
r den angegebenen Wert von x ebenfalls den Wert $2a(a + c)$
hält, was auf vielfache Weise geschehen kann. Man vgl.
s in II über die Gleichung [111] Gesagte.

f. Von den bisher behandelten Gleichungen sind die-
igen dieses Abschnittes als die ursprünglicheren anzusehen.
e ergeben sich, wie oben in b. gezeigt ist, bei der Auf-
sung der symmetrischen Gleichungen des 4. Grades in grofser
zahl gleichsam von selbst; sie lassen sich aus den Dar-
llungen von t stets leicht ablesen. Die in I behandelten
eichungen konnten nicht immer aus den Darstellungen von
bgelesen werden; sie haben eine speciellere Form als die
er behandelten Gleichungen. Eine Gleichung von der in I

behandelten Form hat zugleich immer die Form der hier behandelten Gleichungen; aber die hier behandelten Gleichungen haben nur selten die Form der in I behandelten Gleichungen. Es liegt daher die Frage nahe:

Kann man aus jeder Gleichung von der Form

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ oder } AD = BC \quad [18-28]$$

eine Gleichung von der Form

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{B_1}{C_1} \text{ oder } A_1 C_1 = B_1^2 \quad [8-11]$$

ableiten, und wie geschieht das?

Eine solche Transformation ist stets möglich und zwar in unendlich vielfacher Weise. Man hat nur eine der allgemeinen Gleichungen I, II oder III zu bilden und die willkürlichen Gröfsen so zu bestimmen, dafs die verlangte Bedingung erfüllt, d. h. dafs der Nenner links gleich dem Zähler rechts wird. Man reicht schon mit den einfachen Formeln I oder II aus. In den Ausdrücken A, B, C und D kommen die drei Gröfsen a, b und x vor. Die willkürlichen Gröfsen m, n, p und q sind so zu bestimmen, dafs die Koefficienten von a, b und x im Nenner links und im Zähler rechts einander gleich werden. Man erhält drei Gleichungen, die aufzulösen sind. In den meisten Fällen reicht man schon mit der Gleichung

$$(7) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{mA + nC}{mB + nD}$$

aus. Einige Beispiele werden das Verfahren genügend erklären.

Es sei als die zu transformirende Gleichung

$$1) \quad \frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b} \quad [24]$$

gegeben. Wir bilden nach (7), denn diese Formel genügt hier schon,

$$\frac{m(3a - 2b + 3x) + n(x - 7a + 8b)}{m(a - 2b + x) + n(3x - 5a + 4b)} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b}.$$

Soll der Nenner links gleich dem Zähler rechts werden, wie grofs auch x, a und b sein mögen, so mufs, wie aus der Vergleichung der Faktoren von x, a und b folgt, sein:

IVf. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

$$\left| \begin{array}{l} m + 3n = 1 \\ m - 5n = -7 \\ 4n - 2m = 8 \end{array} \right|, \text{ d. h.}$$

$$m = -2, \quad n = 1.$$

Das giebt:

$$\frac{12b - 13a - 5x}{8b - 7a + x} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b}$$

$$(12b - 13a - 5x)(3x - 5a + 4b) = (8b - 7a + x)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Aus dieser Gleichung lassen sich nach den im 1. Abschnitt angegebenen Methoden unendlich viele andere von derselben Form ableiten.

Es sei

$$2) \quad \frac{5a - 6b + x}{a + x} = \frac{3a - 5b + 3x}{a + b + x} \qquad [25]$$

zu transformiren. Wir bilden zunächst

$$\frac{m(5a - 6b + x) + n(3a - 5b + 3x)}{m(a + x) + n(a + b + x)} = \frac{3a - 5b + 3x}{a + b + x}.$$

Wir müssen daher setzen

$$m + n = 3, \quad n = -5, \quad m + n = 3, \text{ d. h.}$$

$$m = 8, \quad n = -5.$$

Das giebt:

$$\frac{25a - 23b - 7x}{3a - 5b + 3x} = \frac{3a - 5b + 3x}{a + b + x}, \text{ d. h.}$$

$$(25a - 23b - 7x)(a + b + x) = (3a - 5b + 3x)^2$$

L. $x = \sqrt{(a - b)(a + 3b)}$.

Es sei

$$3) \quad \frac{5a - b + x}{2(a + 2b - x)} = \frac{2(2a - b + x)}{a + 11b - x} \qquad [28]$$

zu transformiren. Ein Versuch ergiebt leicht, dafs die Gleichung, wie man das Verfahren auch einrichten mag, in dieser Form sich nicht so einfach behandeln läfst, wie die Gleichungen 1) und 2). Man würde z. B. erhalten:

$$2m + n = 4, \quad 4m + 11n = -2, \quad -2m - n = 2.$$

Diese Gleichungen können jedoch nicht zugleich bestehen. Wir müssen hier daher die vollständigere Formel II (oder I) anwenden und erhalten

$$\frac{m(5a-b+x)+2n(2a-b+x)}{2m(a+2b-x)+n(a+11b-x)} = \frac{p(5a-b+x)+2q(2a-b+x)}{2p(a+2b-x)+q(a+11b-x)}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$.

Es mufs werden

$$\left|\begin{array}{ll} 2m + n & = 5p + 4q \\ 4m + 11n & = -p - 2q \\ 2m + n & = -p - 2q \end{array}\right|.$$

Das giebt als einfachsten Fall

$$m = 5, \quad n = -1, \quad p = 9, \quad q = -9.$$

Da jedoch nur die Verhältnisse in Betracht kommen oder sich ein fortgelassener Faktor leicht wieder hinzufügen läfst, so setzen wir $p = 1$, $q = -1$ und erhalten:

$$\frac{21a - 3b + 3x}{9a + 9b - 9x} = \frac{a + b - x}{a - 7b - x}$$

$$(21a - 3b + 3x)(a - 7b - x) = (3a + 3b - 3x)^2$$

L. $x = \sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$ u. s. w.

V. $\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}$.

29. $\frac{7a - b + x}{7b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 5b + x}{b + 5a + x}$ L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

30. $\frac{x + 3(a - b)}{x - 3(a - b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x + 9a - 7b}{3x + 9b - 7a}$ L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

31. $\frac{x + a - b}{x - a + b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a + 5b}{x + b + 5a}$ L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

31_1. $\frac{4a + b + x}{4b + a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a + 5b - 3x}{3b + 5a - 3x}$ L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

31_2. $\frac{3a + 2b + x}{3b + 2a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a + 7b - x}{2b + 7a - x}$ L. $x = \sqrt{4a^2 + 3ab + 4b^2}$.

31_3. $\frac{a + b - x}{a + b + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2x - 2a + b}{2x + 2b - a}$ L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

a. Diese Gleichungen sind rein quadratisch und haben die Form

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Die erste Frage, welche uns hier entgegentritt, ist: Lassen sich Gleichungen von dieser Form direkt aufstellen, und wie geschieht das?

Die direkte Aufstellung solcher Gleichungen ist sehr einfach; man wird aber selten und nur zufällig zu leidlichen Resultaten gelangen. Setzt man z. B.

$$(2) \quad \frac{\alpha a + \beta b + \gamma x}{\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ma + nb + px}{m_1 a + n_1 b + p_1 x},$$

so mufs, damit die Glieder mit x fortfallen, werden:

$$\left| \begin{array}{ll} p\alpha_1 + m\gamma_1 = 0, & n_1\gamma + p_1\beta = 0 \\ n\gamma_1 + p\beta_1 \;\; = & m_1\gamma + p_1\alpha \end{array} \right|.$$

Wir haben 3 Gleichungen mit 12 Unbekannten. Setzen wir beliebig $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 6$, $\gamma_1 = 7$ und weiter am einfachsten $p = -7$, $m = 5$, $n_1 = -3$, $p_1 = 4$, so bleibt noch die Gleichung

$$7n = 50 + 4m_1,$$

welche am einfachsten durch $m_1 = 5$, $n = 10$ erfüllt wird. Dann geht (2) über in

1. $\frac{2a + 3b + 4x}{5a + 6b + 7x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{5a + 10b - 7x}{5a - 3b + 4x}$

L. $x = \sqrt{\frac{25a^3 + 70a^2b + 51ab^2 + 9b^3}{49a + 16b}}$.

Soll die Lösung nicht gar zu unzierlich werden, so mufs man noch andere Bedingungen hinzufügen, z. B. der Koefficient von x^2 soll schliefslich 1, und die Lösung soll nach a und b symmetrisch sein.

Es ist für die Erfüllung der letzten Bedingung, wie sich später herausstellen wird, nicht notwendig, dafs auch die Gleichung nach a und b symmetrisch ist; aber man kommt am einfachsten zum Ziel, wenn man der Gleichung auch eine nach a und b symmetrische Form giebt. Die Gleichung habe daher die Form

$$(3) \quad \frac{\alpha a + \beta b + \mu x}{\alpha b + \beta a + \mu x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\alpha_1 a + \beta_1 b + \mu_1 x}{\alpha_1 b + \beta_1 a + \mu_1 x}.$$

Wendet man auf diese Gleichung korr. Subtr. an und hebt im Nenner durch $a - b$, so erhält man

$$\frac{\alpha a + \beta b + \mu x}{\alpha - \beta} = \frac{a(\alpha_1 a + \beta_1 b + \mu_1 x)}{\alpha_1 (a + b) + \mu_1 x}.$$

Sollen die angeführten Bedingungen erfüllt werden, so mufs sein und genügt:

1) $\alpha_1 \mu + \alpha \mu_1 = (\alpha - \beta)\mu_1$, d. h. $\alpha_1 \mu + \beta \mu_1 = 0$

2) $\mu \mu_1 = -1$.

Diese Gleichungen werden, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, am einfachsten erfüllt, wenn man setzt:

$$\mu = 1, \quad \mu_1 = -1, \quad \alpha_1 = \beta.$$

Dann erhält man aus (3) als allgemeine Form einer Gleichung, welche die gestellten Bedingungen erfüllt,

$$(4) \quad \frac{\alpha a + \beta b + x}{\alpha b + \beta a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\beta a + \beta_1 b - x}{\beta b + \beta_1 a - x}$$

$$(4_1) \quad \text{L.} = \sqrt{\beta^2 a^2 + (\alpha\beta - \alpha\beta_1 + \beta^2 + \beta\beta_1)ab + \beta^2 b^2}.$$

Setzt man in (4) für α, β und β_1 bezw. 1) $7, -1, -5$; 2) $3, -3, \frac{1}{3}$; 3) $1, -1, -5$, so erhält man die oben aufgeführten Gleichungen 29, 30 und 31.

Auch für eine beliebige in (4_1) enthaltene Lösung kann man eine beliebige Anzahl von Gleichungen aus (4) ablesen.

Soll die Lösung

$$1) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

sein, so mufs nach (4_1)

$$\beta = 1, \quad \alpha\beta - \alpha\beta_1 + \beta^2 + \beta\beta_1 = 0$$

werden. Dann mufs

$$\beta_1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}$$

sein und die Gleichung (4) geht zunächst über in

$$2. \quad \frac{\alpha a + b + x}{\alpha b + a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(\alpha - 1)(a - x) + (\alpha + 1)b}{(\alpha - 1)(b - x) + (\alpha + 1)a}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Setzt man hierin $\alpha = 2, -1, 4$, so erhält man bezw.

3. $\frac{2a + b + x}{2b + a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 3b - x}{b + 3a - x}$

4. $\frac{x - a + b}{x + a - b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - x}{b - x}$

5. $\frac{4a + b + x}{4b + a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a + 5b - 3x}{3b + 5a - 3x}$ [31_1]

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Soll die Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{4a^2 + 3ab + 4b^2}$$

werden, so mufs nach (4_1)

$$\beta = 2, \quad \alpha\beta - \alpha\beta_1 + \beta^2 + \beta\beta_1 = 3, \text{ also}$$

$$\beta_1 = \frac{2\alpha + 1}{\alpha - 2}$$

sein. Setzt man $\alpha = -1, 0, 1, 3, 4$, also entsprechend $\beta_1 = \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -3, 7, 4\frac{1}{2}$, so erhält man aus der Gleichung (4) bezw.

6. $\frac{x - a + 2b}{x - b + 2a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{6a + b - 3x}{6b + a - 3x}$

7. $\frac{x + 2b}{x + 2a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2x - 4a + b}{2x - 4b + a}$

8. $\frac{a + 2b + x}{b + 2a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x - 2a + 3b}{x - 2b + 3a}$

9. $\frac{3a + 2b + x}{3b + 2a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a + 7b - x}{2b + 7a - x}$ [31_2]

10. $\frac{4a + 2b + x}{4b + 2a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{4a + 9b - 2x}{4b + 9a - 2x}$

L. $x = \sqrt{4a^2 + 3ab + 4b^2}$.

Soll die Lösung

$$3)\quad x = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

sein, so hat man wegen (4_1)

$$\beta = 1, \quad \alpha\beta - \alpha\beta_1 + \beta^2 + \beta\beta_1 = 1, \text{ also}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

$$\text{Vb.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Setzt man daher $\alpha = -1, 3, 4, 5,$ also entsprechend $\beta_1 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4},$ so erhält man aus (4) bezw.

$$\textbf{11.}\quad \frac{b-a+x}{a-b+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+b-2x}{2b+a-2x}$$

$$\textbf{12.}\quad \frac{3a+b+x}{3b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+3b-2x}{2b+3a-2x}$$

$$\textbf{13.}\quad \frac{4a+b+x}{4b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a+4b-3x}{3b+4a-3x}$$

$$\textbf{14.}\quad \frac{5a+b+x}{5b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{4a+5b-4x}{4b+5a-4x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + ab + b^2}.$

Die Gleichung 11 geht in 31_3 über, wenn man $-b$ statt b setzt.

b. Den eigentlichen Schlüssel für die Aufstellung von Gleichungen der oben angegebenen Form bilden die symmetrischen Gleichungen des 4. Grades.

So sind in [II. 298] aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grades

$$(5)\quad \frac{(x^2+xy+y^2)(x+y)^2}{(x^2-xy+y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}$$

folgende Darstellungen von t entwickelt und angegeben:

$$(6)\quad \begin{array}{ll}
1.\ \sqrt{\frac{a-b+r}{6b}} & 2.\ \sqrt{\frac{6a}{b-a+r}} \\[1ex]
3.\ \sqrt{\frac{5a+b-r}{r-a-5b}} & 4.\ \sqrt{\frac{7a-b+r}{7b-a+r}} \\[1ex]
5.\ \sqrt{\frac{17a+b-r}{3(r-a-b)}} & 6.\ \sqrt{\frac{3(r-a-b)}{a+17b-r}} \\[1ex]
7.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{a+5b+r}{5a+b+r}} & 8.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{a-7b+r}{7a-b+r}} \\[1ex]
9.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{a+17b+r}{3(a+b+r)}} & 10.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{3(a+b+r)}{17a+b+r}}
\end{array}$$

$$11.\ \sqrt[4]{\frac{17a+b-r}{a+17b-r}} \qquad 12.\ \sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a-b+r}{b-a+r}} \qquad 13.\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{a+17b+r}{17a+b+r}}$$

$$r = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}.$$

Setzt man die 4. und 7. Darstellung einander gleich und x statt r, so erhält man die Gleichung 29. — Aus den angeführten Darstellungen von t lassen sich noch sehr viele andere Gleichungen von der hier behandelten Form hinschreiben. So ergiebt sich, indem man x statt r setzt:

15. $\dfrac{5a+b+x}{5b+a-x} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a-7b+x}{b-7a+x}$ aus 3 und 8

16. $\dfrac{x+a+b}{x-a-b} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a+17b+x}{b+17a-x}$ aus 5 und 9

17. $\dfrac{7a-b+x}{7b-a+x} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{3a+3b+3x}{17a+b+x}$ aus 4 und 10

18. $\dfrac{x+a-b}{x-a+b} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a+17b+x}{b+17a+x}$ aus 12 und 13

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}.$

Die Gleichung 15 ist von der Gleichung 29, die vorn aufgeführt ist, nur durch das Zeichen von x verschieden. Da die Gleichungen alle rein quadratisch sind, so kann x überall auch mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen werden.

Für die Aufgabe [II. 305] kommt man zunächst auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$(7) \qquad \frac{(x^2 - xy + y^2)(x+y)^2}{(x^2 + xy + y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b},$$

und es sind dort als Darstellungen von t gefunden:

$$(8)\quad \begin{array}{llll}
1. & \sqrt{\dfrac{3a-3b+r}{2b}} & 2. & \sqrt{\dfrac{2a}{3b-3a+r}} \\[2ex]
3. & \sqrt{\dfrac{a-3b+r}{3a-b-r}} & 4. & \sqrt{\dfrac{5a-3b+r}{5b-3a+r}} \\[2ex]
5. & \sqrt{\dfrac{7a-9b+3r}{3a+3b-r}} & 6. & \sqrt{\dfrac{3a+3b-r}{7b-9a+3r}} \\[2ex]
7. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{3a-b+r}{3b-a+r}} & 8. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{3a-5b+r}{5a-3b-r}} \\[2ex]
9. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{3a+3b+r}{9b-7a+3r}} & 10. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{9a-7b+3r}{3a+3b+r}}
\end{array}$$

$$11.\ \sqrt[4]{\frac{7a-9b+3r}{7b-9a+3r}} \quad 12.\ \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{3a-3b+r}{3b-3a+r}} \quad 13.\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{9a-7b+3r}{9b-7a+3r}}$$

$$r = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}.$$

Aus den angegebenen Darstellungen von t erhält man, indem man x statt r setzt:

19. $\frac{5a - 3b + x}{5b - 3a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a - b + x}{3b - a + x}$ aus 4 und 7

20. $\frac{7a - 9b + 3x}{3a + 3b - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a - 5b + x}{5a - 3b - x}$ aus 5 und 8

21. $\frac{3a + 3b - x}{3a + 3b + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{7b - 9a + 3x}{9b - 7a + 3x}$ aus 6 und 9

22. $\frac{a - 3b + x}{3a - b - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{9a - 7b + 3x}{3a + 3b + x}$ aus 3 und 10

23. $\frac{x + 3(a - b)}{x - 3(a - b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{9a - 7b + 3x}{9b - 7a + 3x}$ [30] aus 12 und 13

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grades

$$(9) \quad \frac{(x^2 + y^2)(x + y)^2}{2(x^2 - xy + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}$$

ergeben sich nach Ec. folgende Darstellungen von t:

$$1.\ \sqrt{\frac{a - b + r}{2b}} \qquad 2.\ \sqrt{\frac{6a}{b - a + r}}$$

$$3.\ \sqrt{\frac{7a - b + r}{3b - a + r}} \qquad 4.\ \sqrt{\frac{5a + b - r}{r - a - b}}$$

$$(10)\quad 5.\ \sqrt{\frac{3(r - a - b)}{a + 5b - r}} \qquad 6.\ \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{3(a - 3b + r)}{7a - b - r}}$$

$$7.\ \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{3(a + b + r)}{5a + b + r}} \qquad 8.\ \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a + 5b + r}{a + b + r}}$$

$$9.\ \sqrt[4]{\frac{3(5a + b - r)}{a + 5b - r}} \qquad 10.\ \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{3(a - b + r)}{b - a + r}} \qquad 11.\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{3(a + 5b + r)}{b + 5a + r}}$$

$$r = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Die ersten 5 Darstellungen sind nach Ec. die für t mit den Indices $x - y$, $x + y$, xy, $x^2 + y^2$ und $x^2 - xy + y^2$. Die 3 folgenden Darstellungen ergeben sich bezw. aus den 3 vorhergehenden, indem man das r des Zählers in den Nenner und das des Nenners in den Zähler bringt, oder einfacher aus der 1. und 2. Darstellung, wie es in [II. 29, 8] oder in Ec. angegeben ist. Die 3 letzten Darstellungen ergeben sich durch Multiplikation von bezw. 4 und 5, 1 und 2, 7 und 8.

Setzt man die 10. und 11. Darstellung einander gleich und x statt r, so erhält man die oben angeführte Gleichung 31. — Weiter kann man aus den Darstellungen in (10) ablesen:

24. $\frac{7a - b + x}{3b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 5b + x}{a + b + x}$ aus 3 und 8

25. $\frac{x - a - b}{a + 5b - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - 3b + x}{7a - b - x}$ aus 5 und 6

26. $\frac{5a + b - x}{x - a - b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a + 3b + 3x}{5a + b + x}$ aus 4 und 7

27. $\frac{5a + b - x}{5b + a - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a - b}{x - a + b}$ aus 9 und 10

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Von den Gleichungen 15 bis 27 sind viele in Bezug auf a und b nicht symmetrisch, obgleich alle eine symmetrische Lösung haben. Damit ist die oben in a. ausgesprochene Behauptung bestätigt: Gleichungen von der hier behandelten Form sind nicht notwendiger Weise nach a und b symmetrisch, wenn die Lösung nach a und b symmetrisch sein soll. Die in a. für die Aufstellung solcher Gleichungen entwickelten Betrachtungen können daher nicht erschöpfend sein.

c. Gleichungen von der in den vier ersten Abschnitten behandelten Form lassen sich aus jeder beliebigen symmetrischen Gleichung des 4. Grades ableiten. Die Gleichungen von der hier behandelten Form sind specieller als die bisherigen; sie lassen sich nicht aus jeder symmetrischen Gleichung des 4. Grades ableiten. Sollen sich aus einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades quadratische Gleichungen von der hier behandelten Form ableiten lassen, so müssen die Radikanden gewisser Darstellungen von t einen Faktor $\frac{a}{b}$ haben, oder es müssen sich doch solche Darstellungen von t bilden lassen. In [II. 298] ist nachgewiesen, daſs in diesem Falle die symmetrische Gleichung des 4. Grades die Form

$$(11)\quad \frac{(\alpha x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha y^2)(x + y)^2}{(\beta x^2 + 2\beta_1 xy + \beta y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}$$

haben mufs, d. h. links im Zähler den Faktor $(x+y)^2$, im Nenner den Faktor $(x-y)^2$.

Entwickelt man aus der Gleichung (11) die Darstellungen von t, so kommt man auf

$$(12)\ r = \sqrt{(\beta+\beta_1)^2 a^2 + 2(\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1)ab + (\alpha-\alpha_1)^2 b^2}.$$

Dies mufs zugleich die Lösung aller aus der Gleichung (11) abgeleiteten quadratischen Gleichungen sein.

Soll die Lösung der aufzustellenden quadratischen Gleichungen symmetrisch werden, so mufs

$$\beta + \beta_1 = \alpha - \alpha_1$$

sein. Setzt man diese Gröfsen $= p$, so wird

$$\alpha_1 = \alpha - p, \qquad \beta_1 = p - \beta.$$

Dann geht die Gleichung (11) über in

$$(13)\quad \frac{(\alpha x^2 + 2(\alpha - p)xy + \alpha y^2)(x+y)^2}{(\beta x^2 + 2(p-\beta)xy + \beta y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus erhält man nach [II. 233] oder nach Ec.

$$(14)\quad t_{x-y} = \sqrt{\frac{pa - pb + r}{2(2a-p)b}}, \quad t_{x+y} = \sqrt{\frac{2(2\beta - p)a}{pb - pa + r}},$$

$$(15)\quad r = \sqrt{p^2(a+b)^2 + 8(2\alpha\beta - (\alpha+\beta)p)ab}.$$

Die Gleichung (13) giebt die allgemeine Form einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades, aus welcher sich, indem man die Darstellungen von t entwickelt und x statt r setzt, solche quadratische Gleichungen von der hier behandelten Form ableiten lassen, die eine nach a und b symmetrische Lösung haben. Die Lösung mufs den in (15) für r angegebenen Wert haben.

Setzt man in (13): 1) $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $p = 1$; 2) $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $p = 3$; 3) $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $p = 1$, so erhält man bezw. die oben aufgeführten Gleichungen (5), (7), (9).

Setzt man $\alpha = 4$, $\beta = 4$, $p = 3$, so erhält man

$$(16)\quad \frac{(2x^2 + xy + 2y^2)(x+y)^2}{(2x^2 - xy + 2y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich als Darstellungen von t:

$$1.\ \sqrt{\frac{3a-3b+r}{10b}} \qquad 2.\ \sqrt{\frac{10a}{3b-3a+r}}$$

$$3.\ \sqrt{\frac{13a-3b+r}{13b-3a+r}} \qquad 4.\ \sqrt{\frac{7a+3b-r}{r-3a-7b}}$$

$$(17)\quad 5.\ \sqrt{\frac{41a+9b-3r}{5(r-3a-3b)}} \qquad 6.\ \sqrt{\frac{5(r-3a-3b)}{9a+41b-3r}}$$

$$7.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{3a-13b+r}{13a-3b-r}} \qquad 8.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{3a+7b+r}{7a+3b+r}}$$

$$9.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{5(3a+3b+r)}{41a+9b+3r}} \qquad 10.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{9a+41b+3r}{5(3a+3b+r)}}$$

$$11.\ \sqrt[4]{\frac{41a+9b-3r}{41b+9a-3r}} \quad 12.\ \sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\frac{3a-3b+r}{3b-3a+r}} \quad 13.\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{9a+41b+3r}{9b+41a+3r}}$$

$$r = \sqrt{9a^2 + 82ab + 9b^2}.$$

Die Darstellungen 5 und 6 sind bezw. die für t mit den Indices $2x + xy + 2y^2$ und $2x^2 - xy + 2y^2$. Sie sind nach [II. 233] oder nach Ec. gefunden. Die andern sind gefunden nach [II. 298 und 305] oder ebenfalls nach Ec. — Aus den angeführten Darstellungen von t ergeben sich, indem man x statt r setzt, u. a. folgende Gleichungen:

28. $\frac{7a+3b-x}{7b+3a-x} = \frac{a}{b}\cdot\frac{3a-13b+x}{3b-13a+x}$ aus 4 und 7

29. $\frac{13a-3b+x}{13b-3a+x} = \frac{a}{b}\cdot\frac{3a+7b+x}{3b+7a+x}$ aus 3 und 8

30. $\frac{x-3a-3b}{x+3a+3b} = \frac{a}{b}\cdot\frac{9a+41b-3x}{9b+41a+3x}$ aus 6 und 9

31. $\frac{41a+9b-3x}{41b+9a-3x} = \frac{a}{b}\cdot\frac{3a-3b+x}{3b-3a+x}$ aus 11 und 12 u. s. w.

L. $x = \sqrt{9a^2 + 82ab + 9b^2}$.

Setzt man in (13) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $p = 1$, so erhält man

$$(18)\quad \frac{(x^2+y^2)(x+y)^2}{2xy(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Diese Gleichung giebt, in der oben mehrfach durchgeführten Weise behandelt, keine grofse Ausbeute, da zwei Glieder fortgefallen sind, links oben xy, links unten $x^2 + y^2$.

$$\text{Vc.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Man erhält als Darstellungen von t:

1. $\sqrt{\frac{a-b-r}{2b}}$ 2. $\sqrt{\frac{2a}{a-b+r}}$ 3. $\sqrt{\frac{a+b+r}{a-3b+r}}$

4. $\sqrt{\frac{3a-b-r}{a+b+r}}$ 5. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a-3b-r}{a+b-r}}$ 6. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a+b-r}{3a-b+r}}$

7. $\sqrt[4]{\frac{3a-b+r}{a-3b+r}}$ 8. $\sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a-b-r}{a-b+r}}$ 9. $\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a-3b-r}{3a-b+r}}$

$$r = \sqrt{a^2 - 6ab + b^2}.$$

Hieraus ergeben sich, indem man x statt r setzt, folgende Gleichungen:

31. $\frac{a+b+x}{a+b-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a-3b+x}{3a-b+x}$ aus 3 und 6

32. $\frac{a+b-x}{a+b+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-a+3b}{x+b-3a}$ aus 4 und 5

33. $\frac{x+a-b}{x-a+b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a-3b}{x+b-3a}$ aus 7 und 8 u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 - 6ab + b^2}.$

Nach der oben angegebenen Methode zur Aufstellung von Gleichungen der hier behandelten Form hat man auch über die Lösung zu verfügen.

Soll die Lösung der aufzustellenden quadratischen Gleichungen z. B.

$$1)\quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

werden, so mufs man nach (15)

$$(19)\quad p = 1, \qquad 8(2\alpha\beta - \alpha - \beta) = -2$$

setzen, hat also

$$\beta = \frac{4\alpha - 1}{4(2\alpha - 1)}.$$

Nimmt man daher beliebig

$$\alpha = 0,\ 1,\ 2,$$

so mufs entsprechend sein

$$\beta = \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{12}.$$

Dann geht (13) bezw. über in

$$\frac{8xy(x+y)^2}{x^2+6xy+y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}$$

$$(20)\quad \frac{4(x^2+y^2)(x+y)^2}{(3x^2+2xy+3y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{24(x^2+xy+y^2)(x+y)^2}{(7x^2+10xy+7y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

In der ersten Gleichung sollte links das Zeichen — stehen. Das ist fortgelassen, da man, unbeschadet der Lösung, die Zeichen von a und b beliebig ändern kann.

Aus der zweiten Gleichung erhält man in der bekannten Weise als Darstellungen von t:

1. $\sqrt{\frac{2a-b+r}{3b-a+r}}$ 2. $\sqrt{\frac{r-b}{a+b-r}}$ 3. $\sqrt{\frac{a+b-r}{2r-2a}}$

4. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{3b-a-r}{2(b-2a+r)}}$ 5. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a+b+r}{2b+2r}}$ 6. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a+r}{a+b+r}}$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Die 3. Darstellung ist die für t mit dem Index $3x^2 + 2xy + 3y^2$. Daher die Gleichungen

34. $\frac{2a-b+x}{3b-a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b+x}{2b+2x}$ aus 1 und 5

35. $\frac{x+b}{x-a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b-x}{a+b+x}$ aus 2 und 6

36. $\frac{a+b-x}{a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a-3b}{x-2a+b}$ aus 3 und 4

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Soll die Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{a^2-ab+b^2}$$

sein, so hat man wegen (15) zu setzen:

$$p = 1, \quad 8(2\alpha\beta - \alpha - \beta) = -3.$$

Dann wird $\qquad \beta = \frac{8\alpha - 3}{8(2\alpha-1)}.$

Setzt man $\alpha = 1$, so mufs $\beta = \frac{5}{8}$ werden, und die Gleichung (13) geht über in

$$(21)\quad \frac{8(x^2+y^2)(x+y)^2}{(5x^2+6xy+5y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Vd. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Hieraus als Darstellungen von t:

1. $\sqrt{\frac{3a-2b+2r}{6b-2a+2r}}$ 2. $\sqrt{\frac{a-2b+2r}{2a+2b-2r}}$ 3. $\sqrt{\frac{a+b-r}{2b-4a+4r}}$

4. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a-3b+r}{6a-4b-4r}}$ 5. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a+b+r}{4b-2a+4r}}$ 6. $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{2a-b+2r}{2a+2b+2r}}$

$$r = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Daher die Gleichungen:

37. $\frac{3a - 2b + 2x}{3b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + b + x}{2b - a + 2x}$ aus 1 und 5

38. $\frac{a - 2b + 2x}{a + b - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a - b + 2x}{a + b + x}$ aus 2 und 6

39. $\frac{a + b - x}{b - 2a + 2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - 3b + x}{3a - 2b - 2x}$ aus 3 und 4

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$

d. Dafs oben in c. wegen der vorher bestimmten Lösungen 1) und 2) in (15) $p = 1$ gesetzt wurde, wie es in (19) angegeben ist, war nicht notwendig. Man hätte, um aus (15) die Lösung 1) zu erhalten, auch setzen können

$$(22) \quad 8(2\alpha\beta - (\alpha + \beta)p) = -2p^2.$$

Dann wäre (15) übergegangen in

$$r = p\sqrt{a^2 + b^2},$$

und man hätte weiter aus (22) erhalten

$$p^2 - 4(\alpha + \beta)p + 8\alpha\beta = 0$$

$$p = 2(\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Es müssen daher, der für die zu bildenden quadratischen Gleichungen in 1) gegebenen Lösung entsprechend, α und β so gewählt werden, dafs die S u m m e i h r e r Q u a d r a t e ein Q u a d r a t ist. Die oben bei 1) in c. für α und β gefundenen Werte haben diese Eigenschaft. Es ist

$$0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2, \quad 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Ebenso hätte man oben bei 2) in c. nicht $p = 1$ zu setzen brauchen, sondern hätte setzen können

$$(23) \quad 8(2\alpha\beta - (\alpha + \beta)p) = -3p^2.$$

Dann wäre (15) übergegangen in

$$r = p\sqrt{a^2 - ab + b^2},$$

und man hätte weiter aus (23) erhalten

$$3p^2 - 8(\alpha + \beta)p + 16\alpha\beta = 0$$

$$p = 12(\alpha + \beta) + 12\sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}.$$

Es müssen daher, der für die zu bildenden quadratischen Gleichungen in 2) gegebenen Lösung entsprechend, α und β so gewählt werden, dafs $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ ein Quadrat wird. Die oben in c. bei 2) für α und β angegebenen Werte $\alpha = 1$ und $\beta = \frac{5}{8}$ haben diese Eigenschaft. Es ist

$$1^2 - 1 \cdot \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2.$$

Die Gröfsen α und β, d. h. die Koefficienten der Gröfsen $x^2 + y^2$ und xy in der allgemeinen symmetrischen Gleichung des 4. Grades scheinen darnach eine merkwürdige Beziehung zu dem Radikanden von r oder zu der Lösung der quadratischen Gleichungen zu haben, welche aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grades abgeleitet werden sollen. Um diese Beziehung zu untersuchen, möge die Lösung der zu bildenden quadratischen Gleichungen

$$x = \sqrt{\mu^2 a^2 + 2\varrho ab + \nu^2 b^2}$$

sein, da nach (12) die Koefficienten von a^2 und b^2 im Radikanden der Lösung Quadrate sein müssen. Aus der Vergleichung von (12) und (24) ergeben sich, wenn wir $r = qx$ denken, die Relationen:

$$\left|\begin{array}{c} \beta + \beta_1 = \mu q \\ \alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1 = 2\varrho q^2 \\ \alpha - \alpha_1 = \nu q \end{array}\right|.$$

Bestimmt man aus der ersten und dritten Gleichung $\alpha_1 = \alpha - \nu q$, $\beta_1 = \mu q - \beta$ und substituirt dies in der zweiten Gleichung, so erhält man

$$(\mu\nu - \varrho)q^2 - 4(\alpha\mu + \beta\nu)q + 8\alpha\beta = 0,$$

$$(26) \quad q = \frac{2(\alpha\mu + \beta\nu) + 2\sqrt{\mu^2\alpha^2 + 2\varrho\alpha\beta + \nu^2\beta^2}}{\mu\nu - \varrho}.$$

Damit q rational wird, damit also überhaupt die Gleichungen (25) rational erfüllt werden, müssen α und β so gewählt werden, dafs

$$\mu^2\alpha^2 + 2\varrho\alpha\beta + \nu^2\beta^2$$

ein Quadrat wird. Hier sind aber die Koefficienten von α^2, $\alpha\beta$ und β^2 dieselben, welche in (24) bei a^2, ab und b^2 stehen.

Wir haben daher den Satz: Will man aus der allgemeinen symmetrischen Gleichung des 4. Grades

$$\frac{(\alpha x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha y^2)(x+y)^2}{(\beta x^2 + 2\beta_1 xy + \beta y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b} \qquad (11)$$

eine quadratische Gleichung von der hier behandelten Form mit der gegebenen Lösung

$$x = \sqrt{\mu^2 a^2 + 2\varrho ab + \nu^2 b^2}$$

ableiten, so mufs man α und β so bestimmen, dafs sie, statt a und b in der Lösung gesetzt, diese rational, d. h.

$$\mu^2\alpha^2 + 2\varrho\alpha\beta + \nu^2\beta^2$$

zu einem Quadrat machen.

Die Gröfsen α_1, β_1 und q sind dann aus (25) und (26) zu bestimmen.

Es sei als Lösung für die zu bildenden Gleichungen

$$1) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Dann mufs $\alpha^2 + \beta^2$ ein Quadrat werden. Man kann daher setzen

$$\alpha = 4, \quad \beta = 3.$$

Aus der Vergleichung der Lösung mit (24) folgt

$$\mu = \nu = 1, \quad \varrho = 0.$$

Darnach ergiebt sich aus (26) $q = 20, 4$. Nehmen wir den letzten Wert, so wird nach (25)

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1,$$

und die Gleichung (11) geht über in

$$(27) \quad \frac{4(x^2+y^2)(x+y)^2}{(3x^2 + 2xy + 3y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Man hätte, um α_1 und β_1 zu bestimmen, auch wieder auf die Vergleichung der Lösung mit (12) zurückgehen können, wäre aber auch so wieder auf die Gleichungen (25) gekommen, deren Auflösung von einer quadratischen Gleichung abhängt.

Die Gleichung (27) ist schon oben in (20) auf einem anderen Wege gefunden und behandelt. Es sind aus derselben die Gleichungen 34—36 abgeleitet, welche die angegebene Lösung haben.

Es sei als Lösung für die zu bildenden Gleichungen

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben. Dann sind α und β nach dem oben aufgestellten Satze so zu bestimmen, dafs $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ ein Quadrat wird. Nach der Theorie der Diophantischen Aufgaben findet man für α und β leicht beliebig viele Werte, welche der Bedingung genügen. Als kleinste ganze Zahlen genügen

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1.$$

Dann erhält man, da hier $\mu = \nu = 1$, $2\varrho = -1$ ist, als einfachste Werte:

$$q = \frac{4}{3}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{3}, \quad \beta_1 = \frac{1}{3},$$

und die Gleichung (11) geht über in

$$(28) \quad \frac{(3x^2 - 2xy + 3y^2)(x+y)^2}{(3x^2 + 2xy + 3y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Hieraus ergeben sich als Darstellungen von t:

$$(29) \quad \begin{array}{llll} 1. & \sqrt{\dfrac{2a - b + r}{2b - a + r}} & 2. & \sqrt{\dfrac{r - b}{a - r}} \\ 3. & \sqrt{\dfrac{a - 2b + 2r}{a + b - r}} & 4. & \sqrt{\dfrac{a + b - r}{b - 2a + 2r}} \\ 5. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a - 2b + r}{2a - b - r}} & 6. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a + r}{b + r}} \\ 7. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a + b + r}{2b - a + 2r}} & 8. & \sqrt{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{2a - b + 2r}{a + b + r}} \end{array}$$

$$r = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Die 3. und 4. Darstellung sind die für t mit den Indices $3x^2 + 2xy + 3y^2$ und $3x^2 - 2xy + 3y^2$. Die letzten 4 Darstellungen sind der Reihe nach aus den 4 ersten abzuleiten oder werden einfacher nach Ec. gefunden.

Ve. $\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}$.

Aus den angegebenen Darstellungen ergeben sich, indem man x statt r setzt, als gesuchte quadratische Gleichungen:

41. $\frac{2a - b + x}{2b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + x}{b + x}$ aus 1 und 6

42. $\frac{x - b}{a - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + b + x}{2b - a + 2x}$ aus 2 und 7

43. $\frac{a + b + x}{a + b - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a - b + 2x}{a - 2b + 2x}$ aus 3 und 8

44. $\frac{a + b - x}{b - 2a + 2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - 2b + x}{2a - b - x}$ aus 4 und 5

u. s. w. (vgl. 37—39)

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Die Beispiele liefsen sich leicht beliebig vermehren. Wir lassen es jedoch mit den beiden angeführten bewenden, da wir später Methoden kennen lernen werden, die viel schneller zum Ziele führen, als die hier und in c. und d. angegebenen. Diese beiden Methoden, welche nur mit Hülfe der symmetrischen Gleichungen des 4. Grades zum Ziele führen, haben mehr ein theoretisches als ein praktisches Interesse.

e. Bisher sind aus den aufgestellten symmetrischen Gleichungen des 4. Grades nur eine kleinere Zahl von Darstellungen für t und aus diesen eine beschränkte Anzahl von quadratischen Gleichungen gebildet, welche die hier verlangte Form haben. Nach [II. 233] oder nach Ec. ist jedoch die Zahl der einfachen Darstellungen von t, die man aus einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades entwickeln kann, wie nach [II. 298] und nach Ec. auch die Zahl derjenigen Darstellungen, welche im Radikanden den Faktor $\frac{a}{b}$ haben, unendlich, und man kann daher aus jeder solchen symmetrischen Gleichung des 4. Grades, die nach dem Obigen von der Form (11) sein mufs, auch unendlich viele quadratische Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten.

Nach [II. 233] und nach Ec. ist für die Gleichung (5), wie aus der 1. und 2. Darstellung in (6) nach dem K. S. folgt, die allgemeine einfache Darstellung von t

$$(30)\quad t = \sqrt{\frac{(a-b+r)m + 6a\cdot n}{6b\cdot m + (b-a+r)n}}.$$

Nach [II. 298] und nach Ec. ist für dieselbe Gleichung (5), wie ebenfalls aus der 1. und 2. Darstellung in (6) nach dem KS. folgt, da diese sich auch so schreiben lassen:

$$(31)\quad 1.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{a-b+r}{6a}} \qquad 2.\ \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{6b}{b-a+r}},$$

die allgemeine Darstellung für alle t, welche im Radikanden den Faktor $\frac{a}{b}$ haben,

$$(32)\quad t = \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{(a-b+r)p + 6b\cdot q}{6a\cdot p + (b-a+r)q}}.$$

Man kann diese Darstellung von t auch sehr wohl in derselben Weise aus der Darstellung (30) ableiten, wie in (6) 7 aus 3, 8 aus 4 u. s. w. abgeleitet ist oder abgeleitet werden kann; jedoch ist dieser Weg sehr umständlich. Man erhält aus (30) für t^2:

$$(32_1)\quad \frac{(a(m+6n) - bm)^2 - r^2m^2}{(b(6m+n) - an)^2 - r^2n^2}\cdot\frac{b(6m+n) - an - rn}{a(m+6n) - bm - rm}$$
$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{(a-b+r)n - 6bm}{6an - (b-a+r)m}.$$

Der erste Quotient in (32_1) reducirt sich nämlich wegen $r^2 = a^2 + 34ab + b^2$ auf $-\frac{a}{b}$, da sich der Faktor

$$12an(m+3n) - 12bm(3m+n)$$

forthebt. Setzt man in dem gewonnenen Ausdruck dann p statt n und $-q$ statt m, so erhält man (32).

Setzt man (30) und (32) einander gleich und x statt r, so erhält man mit Fortlassung der Wurzel:

$$44.\quad \frac{(a-b+x)m + 6an}{6bm + (b-a+x)n} = \frac{a}{b}\cdot\frac{(a-b+x)p + 6bq}{6ap + (b-a+x)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Die Gleichung 44 ist eine allgemeine Form für eine unendliche Anzahl von quadratischen Gleichungen, welche die hier verlangte Form und die angegebene Lösung haben. Die Gröfsen m, n, p und q sind willkürlich. Setzt man in 44: 1) $m = -1$, $n = 1$,

$p = -1$, $q = 1$; 2) $m = -1$, $n = 3$, $p = 1$, $q = 3$; 3) $m = 1$, $n = 1$, $p = 3$, $q = 1$, so erhält man bezw. die Gleichungen 15—17. Die Gleichung 18 ist nicht in der Gleichung 44 enthalten, wie man auch m, n, p und q bestimmen mag. Sie trägt, wie die Darstellungen 11, 12 und 13 in (6), die ebenfalls nicht in den allgemeinen Darstellungen (31) und (32) enthalten sind, einen besonderen Charakter. Um nach dem KS. zu allgemeinen und somit zu unendlich vielen Darstellungen zu gelangen, sind immer zwei gleich geformte Quotienten nötig, wie hier einerseits die 1. und 2. Darstellung in (6), andrerseits dieselben Darstellungen in der Form (31). Nun stehen aber nach Ec. und nach [II. 22—26] Darstellungen von t wie 11, 12 und 13 in (6) für die Gleichung (5) isolirt da; es giebt nicht zwei derartige von derselben Form. Daher können dieselben auch nicht wie oben die 1. und 2. Darstellung zu einer allgemeinen Darstellung für t in dieser Form benutzt werden; es giebt eben keine allgemeine Darstellung für t von dieser Form, d. h. für t_4.

In derselben Weise, wie oben die Gleichung 44 aus den beiden ersten Darstellungen von t in (6) abgeleitet ist, kann man aus den beiden ersten Darstellungen von t in (8) sofort hinschreiben:

$$45.\quad \frac{(3a - 3b + x)m + 2an}{(3b - 3a + x)n + 2bm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(3a - 3b + x)p + 2bq}{(3b - 3a + x)q + 2ap}$$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 3, -1, 1, -1; 3) -1, 3, 1, 3; 4) 1, -1, 3, 1, so erhält man die Gleichungen 19—22. Aber die Gleichung 23 ist nicht in der Gleichung 45 enthalten.

Ebenso schreibt man aus den beiden ersten Darstellungen von t in (10) die allgemeine Gleichung hin

$$46.\quad \frac{(a - b + x)m + 6an}{(b - a + x)n + 2bm} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a - b + x)p + 6bq}{(b - a + x)q + 2ap}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

In dieser Gleichung sind die Gleichungen 24—26 enthalten, wenn man für m, n, p und q geeignete Zahlen setzt, aber die Gleichung 27 nicht.

$$\text{Vf.}\quad \frac{A}{B}=\frac{a}{b}\cdot\frac{C}{D}.$$

In 43, 45 und 46 sind mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Gleichungen des 4. Grades allgemeine Gleichungen für bestimmte Lösungen aufgestellt. Hieraus ist zu entnehmen, wie man bei andern Lösungen zu verfahren hat. Da wir später einen Weg kennen lernen werden, wie man aus einer gegebenen Lösung direkt die allgemeine Gleichung aufstellt, so werden die obigen drei Beispiele genügen.

f. Es sind in e. die allgemeinen quadratischen Gleichungen aus symmetrischen Gleichungen des 4. Grades abgeleitet; es liegt daher die Frage nahe:

> Wie findet man für eine bestimmte Lösung die allgemeine quadratische Gleichung von der hier verlangten Form, wenn für die Lösung eine specielle Gleichung von dieser Form gegeben ist?

Wir wollen das Verfahren an einigen Beispielen zeigen. Es möge als specielle Gleichung

$$(1)\quad \frac{7a-b+x}{7b-a+x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a+5b+x}{b+5a+x}\quad [29]$$

$$\text{L.}\ x=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$$

gegeben sein. Dann hat man für beide Seiten der Gleichung zwei neue gleichartige Ausdrücke von derselben Form zu suchen. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dafs man mit Hülfe der Lösung links das x aus dem Nenner fortschafft. Man erhält, wenn man den Wert der Seiten der Gleichung mit X bezeichnet,

$$(33)\quad X=\frac{7a-b+x}{7b-a+x}=\frac{a-b+x}{6b}$$

und hieraus nach dem KS. allgemein

$$(34)\quad X=\frac{(7a-b+x)m+(a-b+x)n}{(7b-a+x)m+6bn}.$$

Der zweite Quotient in (33) läfst sich auch so schreiben:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a-b+x}{6a}.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}\cdot\frac{C}{D}.$$

Man hat daher wegen der gegebenen Gleichung auch

$$X = \frac{a}{b}\cdot\frac{a-3b-x}{b-3a+x} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a-b+x}{4a}.$$

Hieraus nach den K. S. allgemein

$$46. \quad X = \frac{a}{b}\cdot\frac{(a-3b-x)p-(a-b-x)q}{(b-3a-x)p-4aq}.$$

Nimmt aus 44 und 46 als die gesuchte allgemeine Gleichung

$$47. \quad \frac{(c-b-x)n-(a-b-x)s}{(b-c-x)n-4bs} = \frac{a}{b}\cdot\frac{(a-3b-x)p+(a-b+x)q}{(b-3a+x)p+6aq}$$

$$\text{wo } x = \sqrt{c^2 - 34cb - x^2}.$$

Man kann auch den dritten Quotienten in 1) ebenso umformen wie den ersten und erhält

$$X = \frac{c}{b}\cdot\frac{c-3b-x}{b-3c-x} = \frac{c}{b}\cdot\frac{c-b-x}{4c}.$$

und also zu demselben Resultate gelangen.

Die Gleichung 47 ist nur scheinbar von 44 verschieden. Setzt man in 47 s statt n, n — s statt s, q statt p, p — q statt q, so erhält man 44.

Setzt man in 47 für n, s, p und q bezw. 1, 0, 1, 0, so erhält man die Gleichung 1, von der wir ausgegangen sind. Setzt man weiter für die willkürlichen Größen bezw. 1, [illegible] so erhält man

$$48. \quad \frac{[illegible]\,c-b-x}{[illegible]\,b-c-x} = \frac{c}{b}\cdot\frac{c-3b-x}{b-3c-x}$$

$$49. \quad \frac{[illegible]\,c-b-x}{[illegible]\,b-c-x} = \frac{c}{b}\cdot\frac{c-3b-x}{b-3c-x} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{wo } x = \sqrt{c^2 - 34cb - b^2}$$

Aus der Gleichung 47 ergeben sich somit die Gleichungen 15—27 durch geeignete Bestimmung der willkürlichen Größen. Nur die Gleichung 15, zu deren Auflösung Formeln von nöten sind, welche durch Wurzeln des 4. Grades ausgedrückt werden, lässt sich, wie nicht aus der Gleichung 44, so auch nicht aus der Gleichung 47 ableiten, und doch lässt sich die Gleichung 15 als ein spezieller Fall einer unendlich zahlreichen Klasse quadratischer Gleichungen von der hier behandelten Form darstellen, wie wir gleich bei der folgenden Aufgabe sehen werden.

Wir haben daher für eine bestimmte Lösung zwei Klassen quadratischer Gleichungen von der hier behandelten Form. Die einen sind abgeleitet aus Darstellungen von t, welche durch eine Quadratwurzel ausgedrückt sind. Sie sollen in Bezug auf die zugehörige symmetrische Gleichung des 4. Grades Gleichungen erster Klasse heifsen. Die andern schliefsen Gleichungen ein, die man aus Darstellungen von t ableiten kann, welche durch Wurzeln des 4. Grades ausgedrückt sind. Sie sollen in Bezug auf die zugehörige symmetrische Gleichung des 4. Grades Gleichungen zweiter Klasse heifsen. Beide Klassen sind unendlich zahlreich.

Die Gleichungen der einen Klasse lassen sich zwar nicht direkt aus denen der andern Klasse ableiten, aber dennoch sind, wie wir weiter unten sehen werden, die Gleichungen der einen Klasse nur scheinbar, nicht wesentlich von den Gleichungen der andern Klasse verschieden. Für eine bestimmte Lösung können die Gleichungen, welche in Bezug auf eine symmetrische Gleichung des 4. Grades zur ersten Klasse gehören, in Bezug auf eine andere symmetrische Gleichung des 4. Grades, welche auf dasselbe r führt, sehr wohl der zweiten Klasse angehören, und umgekehrt. Die Unterscheidung in Gleichungen erster Klasse und in Gleichungen zweiter Klasse läfst sich nur festhalten, wenn die betreffenden Gleichungen aus einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades abgeleitet sind oder zu dieser in Beziehung gebracht werden.

Es möge als specielle Gleichung

$$2)\quad \frac{x + 3(a-b)}{x - 3(a-b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x + 9a - 7b}{3x + 9b - 7a} \quad [30]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben sein. Es soll aus derselben die allgemeine Gleichung abgeleitet werden. Ein Versuch, diese Gleichung direkt ebenso zu behandeln wie die Gleichung 1), zeigt sich leicht als vergeblich. Die Gleichung ist identisch mit der in Vb. entwickelten Gleichung 23. Diese ist aber aus der 11. und 12. Darstellung von t in (8) abgeleitet; sie mufs also in Bezug auf die Gleichung (7) als eine Gleichung zweiter Klasse angesehen werden. Um für dieselbe die allgemeine Gleichung zu finden, mufs man sie so schreiben:

$$\frac{x+3x-3b}{3x+9a-7b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-3a+3b}{3x+9b-7a}.$$

Dann läfst sie sich ganz so behandeln, wie die Gleichung [illegible]) Man hat, wenn man der Einfachheit halber links aus dem Zähler das x fortschafft,

$$X = \frac{x+3a-3b}{3x+9a-7b} = \frac{2a}{x+3a+3b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{x+3a+3b}.$$

Man findet daher nach demselben Verfahren, wie oben, die allgemeine Gleichung

$$\frac{(x+3a-3b)m+2an}{(3x+9a-7b)m+(x+3a+3b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x-3a+3b)p+2bq}{(3x+9b-7a)p+(x+3a+3b)q}$$

oder mit Vertauschung des Nenners links und des Zählers rechts

$$50.\quad \frac{(x+3a-3b)m+2an}{(x-3a+3b)p+2bq} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(3x+9a-7b)m+(x+3a+3b)n}{(3x+9b-7a)p+(x+3a+3b)q}$$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Setzt man $m = 1$, $n = 0$, $p = 1$, $q = 0$, so erhält man die Gleichung 2), von welcher wir ausgegangen sind. Setzt man weiter für die willkürlichen Gröfsen m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, −1, 1, −1; 3) 2, −3, 2, −3; 4) 1, 3, 1, 3, so erhält man:

$$51.\quad \frac{x+5a-3b}{x+5b-3a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+3a-b}{x+3b-a}$$

$$52.\quad \frac{x+a-3b}{x+b-3a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+3a-5b}{x+3b-5a}$$

$$53.\quad \frac{x-3b}{x-3a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x+9a-23b}{3x+9b-23a}$$

$$54.\quad \frac{x+9a-3b}{x+9b-3a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x+9a+b}{3x+9b+a}$$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

$$\text{Vf. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Die Gleichung 51 stimmt zufällig mit der Gleichung 19 in b. überein. Man wird sich jedoch vergebens bemühen, aus der Gleichung 50, wie man auch die Gröfsen m, n, p und q bestimmen mag, eine der Gleichungen 20—22 abzuleiten, obgleich diese dieselbe Form und dieselbe Lösung haben. Die Gleichung 50 repräsentirt in Bezug auf die symmetrische Gleichung (7) die Gleichungen zweiter Klasse, während die Gleichungen 20—22 in Bezug auf (7) der ersten Klasse angehören. Für diese ist die allgemeine Gleichung in 45 aufgestellt.

Will man hiernach auch für die Gleichung 18 in b. die allgemeine Gleichung aufstellen, so mufs man sie so schreiben:

$$\frac{x+a-b}{a+17b+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-a+b}{b+17a+x}.$$

Dann erhält man, da

$$\frac{x+a-b}{a+17b+x} = \frac{2a}{x+a+b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{x+a+b}$$

ist, wie oben bei 50, nach Vertauschung des Nenners links und des Zählers rechts als allgemeine Gleichung leicht

55. $$\frac{(x+a-b)m+2an}{(x-a+b)p+2bq} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a+17b+x)m+(x+a+b)n}{(b+17a+x)p+(x+a+b)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Setzt man $m=1$, $n=0$, $p=1$, $q=0$, so erhält man die Gleichung 18 in b., von welcher wir ausgegangen sind. Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2; 3) 2, —1, 2, —1, so erhält man:

56. $$\frac{x+3a-b}{x+3b-a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a+9b}{x+b+9a}$$

57. $$\frac{x+5a-b}{x+5b-a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x+3a+19b}{3x+3b+19a}$$

58. $$\frac{x-b}{x-a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a+33b}{x+b+33a}$$

L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

In Bezug auf die Gleichung (5) gehören die Gleichungen 15—17 und 47—49 der ersten Klasse an, während die Gleichungen 18 und 55—58 der zweiten Klasse angehören.

Es möge als specielle Gleichung

$$3)\quad \frac{x+a-b}{x-a+b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a+5b}{x+b+5a} \quad [31]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$$

gegeben sein. Ein Versuch zeigt leicht, dafs sie nach 2) zu behandeln ist. Man schreibt zunächst

$$\frac{x+a-b}{x+a+5b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-a+b}{x+b+5a}$$

und findet

$$\frac{x+a-b}{x+a+5b} = \frac{2a}{x+a+b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2b}{x+a+b}.$$

Daher wird, wie man leicht übersieht, die allgemeine Gleichung

59. $$\frac{(x+a-b)m+2an}{(x-a+b)p+2bq} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x+a+5b)m+(x+a+b)n}{(x+b+5a)p+(x+a+b)q}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so giebt das:

60. $$\frac{x+3a-b}{x+3b-a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a+3b}{x+b+3a}$$

61. $$\frac{x+5a-b}{x+5b-a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x+3a+7b}{3x+3b+7a} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Diese Gleichungen gehören derselben Klasse an, zu welche 27 in b. gehört. Die Gleichungen 24—26 gehören jedoc einer andern Klasse an, sind nicht in 59 enthalten.

Es sei

$$4)\quad \frac{4a+b+x}{4b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a+5b-3x}{3b+5a-3x} \quad [31_1]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Man hat nach 2) zu verfahren und findet zunäch

$$\frac{4a+b+x}{3a+5b-3x} = \frac{a}{a+b-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a+b-x}$$

und daher ähnlich, wie oben, allgemein

62. $$\frac{(4a+b+x)m+an}{(4b+a+x)p+bq} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(3a+5b-3x)m+(a+b-x)}{(3b+5a-3x)p+(a+b-x)}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Oben in a. sind unter 2—5 ebenfalls Gleichungen für dieselbe Lösung aufgestellt. Diese sind alle in der allgemeinen Gleichung 62 enthalten. Man erhält dieselben, wenn man für m, n, p und q bezw. setzt 1) $1, \alpha - 4, 1, \alpha - 4$; 2) $1, -2, 1, -2$; 3) $1, -5, 1, -5$; 4) $1, 0, 1, 0$. — Die Gleichungen 34—36 sind jedoch nicht in der Gleichung 62 enthalten; sie gehören der andern Klasse an.

Es sei

$$5)\quad \frac{3a+2b+x}{3b+2a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+7b-x}{2b+7a-x} \qquad [31_2]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{4a^2+3ab+4b^2}$$

gegeben. Nach 2) hat man

$$\frac{3a+2b+x}{2a+7b-x} = \frac{2a+2b+x}{5b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+2b+x}{5a}$$

und daher allgemein

$$\textbf{63.}\quad \frac{(3a+2b+x)m+(2a+2b+x)n}{(3b+2a+x)p+(2a+2b+x)q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(2a+7b-x)m+5bn}{(2b+7a-x)p+5aq}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{4a^2+3ab+4b^2}.$$

Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

$$\textbf{64.}\quad \frac{5a+4b+2x}{5b+4a+2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+12b-x}{2b+12a-x}$$

$$\textbf{65.}\quad \frac{7a+6b+3x}{7b+6a+3x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+17b-x}{2b+17a-x} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{4a^2+3ab+4b^2}.$$

In der Gleichung 63 sind auch die Gleichungen 6—10 enthalten.

Es sei endlich noch die letzte der vorn aufgeführten Gleichungen

$$6)\quad \frac{a+b-x}{a+b+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2x-2a+b}{2x+2b-a} \qquad [31_3]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2-ab+b^2}$$

als specielle Gleichung gegeben. Man hat hier nach 2)

$$\frac{a+b-x}{2x-2a+b} = \frac{a}{x-a+b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{x-a+b}$$

$$\text{Vg. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

und daher allgemein

66. $$\frac{(a+b-x)m+an}{(a+b+x)p+bq} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(2x-2a+b)m+(x-a+b)n}{(2x+2b-a)p+(x-a+b)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

67. $$\frac{2a+b-x}{2b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x-3a+2b}{3x+3b-2a}$$

68. $$\frac{3a+b-x}{3b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{4x-4a+3b}{4x+4b-3a} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

In der Gleichung 66 sind auch die Gleichungen 37—39 und 40—43 enthalten. Die hier entwickelten Gleichungen, wie die Gleichungen 37—39 und die Gleichungen 40—43 müssen daher sowohl in Bezug auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades (21) als auch in Bezug auf (28) zur ersten Klasse gehören.

g. Es ist in f. gezeigt, dafs die hier behandelten Gleichungen für eine bestimmte Lösung zwei Klassen angehören, von denen jede unendlich zahlreich ist. Das Vorhandensein der beiden Klassen ging aus der Theorie der symmetrischen Gleichungen des 4. Grades und aus dem Zusammenhang dieser Gleichungen mit den hier aufgestellten quadratischen Gleichungen hervor. Die Gleichungen der einen Klasse lassen sich nicht direkt aus den Gleichungen der andern Klasse ableiten. Es ist jedoch gezeigt, wie man aus einer einzelnen Gleichung der einen Klasse alle Gleichungen derselben Klasse ableiten kann. Es mufs daher die Frage von Interesse sein: Kann man aus einer gegebenen Gleichung von der hier behandelten Form, welche der einen Klasse angehört, alle Gleichungen der anderen Klasse ableiten, und wie geschieht das?

Ein Weg zur Lösung dieser Aufgabe liefse sich nach den bisherigen Erörterungen leicht einschlagen. Man geht von der gegebenen Gleichung auf eine entsprechende symmetrische Gleichung des 4. Grades zurück, was nach If., IVc.

oder weiter unten nach h. immer leicht ist, und entwickelt die Darstellungen von t und t_4. Dann gehören die Gleichungen, welche aus den Darstellungen von t sich ergeben, zu derselben Klasse, zu welcher die gegebene Gleichung gehört, ınd die Darstellungen von t_4 liefern die Gleichungen der ındern Klasse. Dieser Weg ist jedoch umständlich; man :ann auch ohne Aufstellung der zugehörigen symmetrischen leichung des 4. Grades zum Ziele kommen. Der Zusammenang der quadratischen Gleichungen mit den Darstellungen on t giebt jedoch den Fingerzeig zur Lösung der Aufgabe.

Die einfachen Darstellungen von t, die zu einer symıetrischen Gleichung des 4. Grades gehören, müssen die uadrate der Darstellungen von t_4 sein. So müssen auch ie Seiten einer Gleichung erster Klasse die Quadrate der eiten einer entsprechenden Gleichung zweiter Klasse sein. abei kann der Faktor $\frac{a}{b}$ fortfallen. Können wir daher für ıne gegebene Gleichung erster Klasse die Quadrate der Seiten ı derselben Form darstellen, welche die Seiten selber haben, › mufs die gewonnene Gleichung der zweiten Klasse anehören. Gehört eine gegebene Gleichung der zweiten Klasse n und man kann die Wurzeln aus den Seiten der Gleichung ı derselben Form darstellen, welche die Seiten selber haben, o mufs die neue Gleichung der ersten Klasse angehören.

Ein Beispiel für den ersten und eins für den zweiten all werden das Verfahren genügend erklären.

Es sei

$$1) \quad \frac{7a - b + x}{7b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 5b + x}{b + 5a + x} \quad [29]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$$

gegeben. Diese Gleichung mufs nach f. in Bezug auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades in (5), wie auch aus (6) und der Gleichung 15 folgt, als eine Gleichung erster Klasse angesehen werden. Sie ist nach 1) in f. ein specieller Fall der allgemeinen Gleichung

$$(36) \quad \frac{(7a-b+x)m+(a-b+x)n}{(7b-a+x)m+6bn} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a+5b+x)p+(a-b+x)q}{(b+5a+x)p+6aq}.$$

$$\text{Vg.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}\,.$$

Hat man nun für eine Gleichung, deren Seiten den Wert X haben mögen,

$$(37)\quad X = \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C_1}{D_1}$$

gefunden, und man kann durch geeignete Bestimmung der willkürlichen Gröfsen

$$A_1 = B,\quad B_1 = C,\quad C_1 = D$$

machen, so mufs, wie aus der Multiplikation zweier gleichwertiger Gröfsen folgt,

$$(38)\quad X^2 = \frac{A}{B_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{A_1}{D} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{C}{D_1}$$

sein, d. h. X^2 ist durch Ausdrücke von derselben Form dargestellt, in welcher X gegeben ist.

Nach den gemachten Andeutungen müssen wir erstens uns von den unendlich vielen Quotienten, welche der Quotient links in (36) enthält, zwei auswählen, von denen der Nenner des ersten gleich dem Zähler des zweiten ist. Wir setzen daher

$$\frac{(7a - b + x)m + (a - b + x)n}{(7b - a + x)m + 6bn} = \frac{(7a - b + x)m_1 + (a - b + x)n_1}{(7b - a + x)m_1 + 6bn_1}$$

und zugleich, um die Forderung zu erfüllen,

$$(7b - a + x)m + 6bn = (7a - b + x)m_1 + (a - b + x)n_1.$$

Das giebt, indem man die Koefficienten von a, b und x auf beiden Seiten bezw. einander gleich setzt:

$$m = 3,\quad n = -4,\quad m_1 = -1,\ n_1 = 4,\ \text{also}$$

$$1.\ X = \frac{17a + b - x}{3(x - a - b)} = \frac{3(x - a - b)}{a + 17b - x}$$

Zweitens müssen wir von den unendlich vielen Quotienten, welche in dem ersten und dritten Quotienten in (36) enthalten sind, zwei solche auswählen, in welchen der Nenner des ersten gleich dem Zähler des dritten ist. Wir haben daher zu setzen

$$(7b - a + x)m + 6bn = (a + 5b + x)p + (a - b + x)q.$$

Das giebt:

$$m = 0,\quad n = 1,\quad p = 1,\quad q = -1.$$

$$\text{Vg. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Wir erhalten daher als speciellen Fall von (36)

$$2.\ X = \frac{x + a - b}{6b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{6b}{x - a + b}.$$

Um die dritte Forderung zu erfüllen, müssen wir drittens setzen

$$(b + 5a + x)p + 6aq = (a + 5b + x)p_1 + (a - b + x)q_1.$$

Das giebt:

$$p = 3, \quad q = -2, \quad p_1 = 1, \quad q_1 = 2.$$

Wir erhalten daher

$$3.\ X = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 17b + x}{3(a + b + x)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3(a + b + x)}{b + 17a + x}.$$

Aus den so entwickelten 6 Darstellungen von X ergeben sich, indem man je zwei neben einander stehende mit einander multiplicirt, die gesuchten Darstellungen von X^2:

$$(39) \quad \left| \begin{array}{l} 1.\ X^2 = \dfrac{17a + b - x}{17b + a - x} \\[2ex] 2.\ X^2 = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{x + a - b}{x - a + b} \\[2ex] 3.\ X^2 = \dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{a + 17b + x}{b + 17a + x}. \end{array} \right.$$

Setzen wir in diesen für X^2 gefundenen Ausdrücken r statt x und ziehen die vierte Wurzel, so haben wir die 11., 12. und 13. Darstellung von t zu (5) in b.

Aus (39) ergeben sich durch Gleichsetzung die Gleichungen:

$$(40) \quad \begin{array}{l} 1.\ \dfrac{17a + b - x}{17b + a - x} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{x + a - b}{x - a + b} \\[2ex] 2.\ \dfrac{x + a - b}{x - a + b} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a + 17b + x}{b + 17a + x} \\[2ex] 3.\ \dfrac{17a + b - x}{17b + a - x} = \dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{a + 17b + x}{b + 17a + x} \end{array}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}.$$

Die dritte Gleichung kommt hier nicht in Betracht. Die erste und zweite Gleichung sind, wenn die gegebene Gleichung 1) zur ersten Klasse gehört, Gleichungen zweiter Klasse, wie auch aus der Gleichung 18 in b. folgt. Sie sind nur durch das Zeichen von x verschieden.

Wie man nun aus einer speciellen Gleichung zweiter Klasse, z. B. aus 2. in (40), die allgemeine Gleichung entwickelt, ist oben in f. gezeigt. Man erhält darnach für 2. in (40)

$$(41)\ \frac{(x+a-b)m+2an}{(x-a+b)p+2bq} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a+17b+x)m+(x+a+b)n}{(b+17a+x)p+(x+a+b)q}$$

als allgemeine Gleichung, in welcher alle Gleichungen zweiter Klasse enthalten sind, denen die gegebene Gleichung 1) als specielle Gleichung erster Klasse entspricht.

Es sei

$$2)\quad \frac{x+3a-3b}{x-3a+3b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x+9a-7b}{3x+9b-7a} \quad [30]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben. Die Gleichung gehört, wie aus der Gleichung 23. im Vergleich mit (8) oder aus 2) in f. zu ersehen ist, in Bezug auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades in (7) der zweiten Klasse an.

Wie wir bei 1) die Seiten der Gleichung mit X bezeichneten und X^2 suchten, so müssen wir hier die Seiten der Gleichung mit X^2 bezeichnen und, abgesehen von einem etwa erscheinenden Faktor, X suchen.

Da die Seiten dieser Gleichung in Bezug auf eine symmetrische Gleichung des 4. Grades ursprünglich Darstellungen der 4. Potenz von t_4 sind oder doch so angesehen werden können, wir aber nach Ec. oder nach [II. 236] wissen, daſs das Produkt aus dem Zähler und Nenner des Radikanden von t_4 stets ein vollständiges Quadrat ist, so erweitern wir in der gegebenen Gleichung, um die angegebenen Produkte zu bilden und dadurch Quadrate zu erhalten, den ersten und dritten Quotienten jeden mit seinem Zähler (oder Nenner). Dann sind die Zähler Quadrate, und die Nenner müssen es nach Ec. oder nach [II. 236] ebenfalls sein. Der erste Quotient ist also mit $x + 3a - 3b$, der dritte mit $3x + 9a - 7b$ zu erweitern. Das giebt mit Benutzung der Lösung, wenn

der oben gemachten Andeutung die Seiten der Gleichung
^{2} bezeichnet werden, leicht

$$X^2 = \frac{(x + 3a - 3b)^2}{4ab} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(3x + 9a - 7b)^2}{(x + 3a + 3b)^2}$$

$$X^2 = \frac{(x + 3a - 3b)^2}{4b^2} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(\frac{3x + 9a - 7b}{x + 3a + 3b}\right)^2.$$

ı durch Radicirung

$$42) \quad \frac{x + 3a - 3b}{2b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x + 9a - 7b}{x + 3a + 3b}.$$

st, wie man aus der Gleichsetzung der 1. und 10. Darıg in (8) erkennt, für die symmetrische Gleichung des ıdes in (7) eine Gleichung erster Klasse.

ıus der speciellen Gleichung (42) lässt sich, wie es in f. t ist, leicht die allgemeine Gleichung erster e ableiten, welche der Gleichung zweiter Klasse ent-t, von der wir ausgegangen sind. Man erhält als ein-e allgemeine Gleichung die Gleichung 45.

Vie sich für die hier aufgestellten Gleichungen der Unter- in Gleichungen erster und zweiter Klasse nur in Bezug ne bestimmte symmetrische Gleichung des 4. Grades, elcher die Gleichungen entwickelt sind, festhalten läſst, ben auch die Transformationen von Gleichungen der Klasse in solche der andern Klasse nur dann ein be-es Interesse, wenn die Gleichungen zu einer sym-chen Gleichung des 4. Grades in Beziehung stehen oder iehung gebracht sind. Daher läſst sich die beim Bei-) angewendete Methode auch nur dann anwenden, wenn veiſs, daſs die vorgelegte Gleichung in Bezug auf eine etrische Gleichung des 4. Grades zur zweiten Klasse . Solcher Gleichungen giebt es jedoch für jede sym-che Gleichung des 4. Grades nur zwei. So ergeben us den drei letzten Darstellungen von t in (8) für (7) leichungen zweiter Klasse die beiden:

$$43) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{x - 3(a - b)}{x + 3(a - b)} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{3x - 9a + 7b}{3x - 9b + 7a} \\[2ex] \dfrac{x + 3(a - b)}{x - 3(a - b)} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{3x + 9a - 7b}{3x + 9b - 7a}, \end{array} \right.$$

welche nur durch das Zeichen von x verschieden sind. Nu diese beiden Gleichungen zweiter Klasse haben die oben be 2) zur Transformation benutzte Eigenschaft, dafs die Pro dukte aus Zähler und Nenner links und rechts Qua drate sind. Alle andern Gleichungen, welche sonst für di betreffende Lösung als Gleichungen zweiter Klasse bezeichne sind, weil sie dieselbe allgemeine Gleichung haben, wie di angeführten, für den hier behandelten Fall die Gleichung 50 haben die angegebene Eigenschaft nicht. Man nehme z. B die Gleichung 53

$$(44) \quad \frac{x-3b}{x-3a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x+9a-23b}{3x+9b-23a}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}.$$

Sie mufs als specieller Fall der Gleichung 50, in welcher d Gleichung 2) in f. enthalten ist, die nach 23 in Bezug a (7) zur zweiten Klasse gehört, ebenfalls zur zweiten Klas gerechnet werden; aber hier ist weder $(x-3b)(x-3a$ noch $(3x+9a-23b)(3x+9b-23a)$, noch $a(3x+9a-23b$ $b(3x+9b-23a)$, noch, wenn man die Gleichung anders fo mirt, $(x-3b)(3x+9a-23b)$, noch $(x-3a)(3x+9b-23$ ein Quadrat.

Will man daher aus einer vorgelegten Gleichung v der hier behandelten Form, welche einer Klasse angehör die Gleichungen entwickeln, welche der andern Klasse a gehören, so mufs man verfahren, wie es oben bei der Gle chung 1) angegeben ist. Will das nicht gelingen, so h man vor der Transformation den Nenner links und den Zähl rechts zu vertauschen. So hat man statt (44) zunächst

$$\frac{x-3b}{3x+9a-23b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-3a}{3x+9b-23a},$$

statt 2) oben zunächst

$$\frac{x+3a-3b}{3x+9a-7b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x-3a+3b}{3x+9b-7a}$$

zu schreiben und dann nach 1) zu verfahren.

Wir werden weiter unten Methoden kennen lernen, welchen man alle diese Transformationen direkt au

Lösung entwickeln kann, ohne erst auf die betreffenden symmetrischen Gleichungen Rücksicht zu nehmen. Daher mag es hier mit den angeführten beiden Beispielen sein Bewenden haben.

h. Wie man aus einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades quadratische Gleichungen von der hier behandelten Form ableitet, ist oben gezeigt worden. Es ist auch hier die umgekehrte Frage von einigem Interesse: Wie findet man aus einer quadratischen Gleichung von der hier behandelten Form die symmetrische Gleichung des 4. Grades, aus welcher jene quadratische Gleichung abgeleitet ist oder abgeleitet werden kann?

Man verfahre ähnlich, wie es in If. und IVc. für die dort behandelten Gleichungen angegeben ist. Es mögen zu dem Zwecke die schon mehrmals benutzten Gleichungen [29] und [30] gegeben sein:

$$1)\quad \frac{7a - b + x}{7b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 5b + x}{b + 5a + x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}.$$

Die Gleichung gehört in Bezug auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades in (5), wie aus der Gleichung 15 folgt, der ersten Klasse an. An der Gleichung selber ist das nicht zu erkennen. Es ist aber auch kein Grund vorhanden, sie als Gleichung zweiter Klasse anzusehen. Gehört die Gleichung der ersten Klasse an, so müssen die Seiten der Gleichung, wie aus den Erörterungen in b. folgt, wenn man r statt x setzt, Darstellungen von

$$t^2 = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)$$

sein. Man hat daher

$$\frac{7a - b + r}{7b - a + r} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 5b + r}{b + 5a + r} = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2.$$

Das zweite Glied ist mit Hülfe der Lösung umzuformen. Man erhält

$$\frac{7a - b + r}{7b - a + r} = \frac{a - b + r}{6b} = \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung ist r zu eliminiren und $\frac{a}{b}$ zu bestimmen, ähnlich, wie es oben in 1f. gezeigt ist. Man hat zunächst durch korr. Subtr.

$$\frac{7a - b + r}{2(a - b)} = \frac{(x + y)^2}{xy}.$$

Dann weiter:

$$\left[\begin{aligned} 7a - b + r &= 2(a - b) \cdot \frac{(x + y)^2}{xy} \\ a - b + r &= 6b \cdot \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^2 \end{aligned}\right].$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen r durch Subtraktion und sucht $\frac{a}{b}$, so erhält man die symmetrische Gleichung des 4. Grades in (5), aus welcher die gegebene quadratische Gleichung abgeleitet ist.

Ist als quadratische Gleichung

$$2)\qquad \frac{x + 3a - 3b}{x - 3a + 3b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x + 9a - 7b}{3x + 9b - 7a}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben, so können wir die Gleichung so schreiben

$$\frac{x + 3a - 3b}{3x + 9a - 7b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x - 3a + 3b}{3x + 9b - 7a},$$

sie als Gleichung erster Klasse betrachten und sie behandeln, wie die Gleichung 1). Man kommt dann jedoch nicht auf die Gleichung (7), sondern auf

$$\frac{(5x^2 + 22xy + 5y^2)(x + y)^2}{2(x^2 + 4xy + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Bildet man jedoch die Produkte aus den Zählern und Nennern in der gegebenen Gleichung, so findet man leicht

$$(x + 3a - 3b)(x - 3a + 3b) = 4ab$$

$$(3x + 9a - 7b)(3x + 9b - 7a) = (3a + 3b + x)^2.$$

Die Gleichung kann daher, wenn wir sie in der Form schreib

$$\frac{3x + 9b - 7a}{3x + 9a - 7b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x - 3a + 3b}{x + 3a - 3b},$$

da die Produkte aus Zähler und Nenner links und rechts Quadrate sind, als eine Gleichung zweiter Klasse angesehen werden. Dann ist aber die Gleichung aus Darstellungen von t hervorgegangen, welche durch Wurzeln 4. Grades ausgedrückt sind. Man hat daher zu setzen

$$\frac{3r+9b-7a}{3r+9a-7b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{r-3a+3b}{r+3a-3b} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^4.$$

Erweitert man das erste Glied mit seinem Nenner, das zweite ebenfalls mit dem seinigen, so werden die beiden ersten Glieder Quadrate, man kann die Wurzel ziehen und erhält

$$\frac{r+3a+3b}{3r+9a-7b} = \frac{2a}{r+3a-3b} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

Hieraus ergiebt sich, indem man r eliminirt, als die gesuchte symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$\frac{(x^2-4xy+y^2)(x+y)^2}{(x^2+4xy+y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Will man auf die Gleichung (7) zurückkommen, so mufs man die gegebene Gleichung mit $\frac{a}{b}$ multipliciren. Dann sind die Produkte aus den Nennern und Zählern ebenfalls Quadrate. Man hat dann zu setzen

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{r+3a-3b}{r-3a+3b} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{3r+9a-7b}{3r+9b-7a} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^4.$$

Erweitert man das erste und zweite Glied jedes mit seinem Nenner, hebt durch b^2 und radicirt, so erhält man

$$\frac{2a}{r-3a+3b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{r+3a+3b}{3r+9b-7a} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$$

$$\frac{2a}{r-3a+3b} = \frac{r+3a-3b}{2b} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Man kommt auf die Gleichung (7).

i. Will man aus einer gegebenen oder vorher bestimmten Lösung eine symmetrische Gleichung des 4. Grades aufstellen, aus welcher man Gleichungen von der hier behandelten Form ableiten kann, so hat man nach Ie. zu verfahren. Dabei ist jedoch das oben in c. und d. Gesagte zu beachten.

Erstens mufs die Lösung, wenn sie einer quadratischen Gleichung von der hier behandelten Gleichung angehören soll, nach d. von der Form

$$(45) \quad x = \sqrt{\mu^2 a^2 + 2\varrho ab + \nu^2 b^2}$$

sein oder doch auf diese Form gebracht werden können, d. h. die Koefficienten von a^2 und b^2 müssen Quadrate sein. Hat die Lösung diese Form nicht, so ist die gestellte Aufgabe nicht ausführbar.

Zweitens mufs nach c. die symmetrische Gleichung des 4. Grades, deren rechte Seite $\frac{a}{b}$ ist, links im Zähler den Faktor $(x+y)^2$, im Nenner den Faktor $(x-y)^2$ haben.

Zwei Beispiele werden genügen, das Verfahren zu erörtern.

Es sei als Lösung

$$1) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Die Lösung hat die angegebene Form; die Koefficienten von a^2 und b^2 sind 1 und 1, können also als Quadrate angesehen werden. Dann hat man nach 1) in Ie. zu setzen

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + bz$$

und erhält:

$$b = 2az + bz^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - z^2}{2z},$$

$$(46) \quad \frac{v^2 - w^2}{2vw} = \frac{a}{b} \text{ (vgl. (27) in I).}$$

Damit die zweite Bedingung erfüllt wird, kann man hier setzen: 1) $v + w = (x+y)^2$, $v = (x-y)^2$; 2) $v + w = (x+y)^2$, $w = (x-y)^2$; 3) $v - w = (x+y)^2$, $v = (x-y)^2$; 4) $v - w = (x+y)^2$, $w = (x-y)^2$. Wählt man das letztere, so dafs also

$$v = 2(x^2 + y)^2, \quad v + w = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

ist, so erhält man

$$\frac{(3x^2 - 2xy + 3y^2)(x+y)^2}{4(x^2 + y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Für diese Gleichungen sind schon oben in Ic. bei (6) die Darstellungen von t entwickelt. Aus diesen kann man nach e. oben beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Form hinschreiben. Man erhält zunächst die allgemeine Gleichung

69. $$\frac{2am + (a - b + x)n}{(b - a + x)m + bn} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2bp + (a - b + x)q}{(b - a + x)p + aq}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Aus dieser Gleichung ergeben sich bei gehöriger Bestimmung der willkürlichen Gröfsen auch die Gleichungen 34—36. Die für dieselbe Lösung in a. aufgestellten Gleichungen 2—5 sind nicht in der Gleichung 69 enthalten, wohl aber in der allgemeinen Gleichung 62. Die Gleichungen 62 und 69 repräsentiren die beiden grofsen Klassen aller für die angegebene Lösung möglichen Gleichungen von der hier verlangten Form.

Es sei

$$2)\quad x = \sqrt{a(a - b)}\ [\text{vgl. } 23]$$

als Lösung gegeben. Die Aufgabe ist ausführbar, da die Lösung in (45) enthalten ist. Es ist $\mu = 1$, $\nu = 0$, $\varrho = -\frac{1}{2}$. Nach Ie. ist die Wurzel rational zu machen. Man kann einfach setzen

$$x = \sqrt{a(a - b)} = az.$$

Das giebt nach dem in Ie. erörterten Verfahren

$$(47)\quad \frac{a}{b} = \frac{1}{1 - z^2} = \frac{v^2}{v^2 - w^2}.$$

Setzt man weiter, um die oben angegebene zweite Bedingung zu erfüllen,

$$v = (x + y)^2,\quad v - w = (x - y)^2, \text{ also}$$
$$w = 4xy,\qquad v + w = x^2 + 6xy + y^2,$$

so erhält man aus (47) als die gesuchte Gleichung des vierten Grades

$$\frac{(x + y)^4}{(x^2 + 6xy + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Diese liefert als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{r}{b+a+r}} = \sqrt{\frac{2a+r}{a+b-r}} = \sqrt{\frac{a+r}{b}} = \sqrt{\frac{a}{a-r}},$$
$$r = \sqrt{a(a-b)}.$$

Hieraus ergiebt sich die allgemeine Gleichung

70. $$\frac{(a+x)m+an}{bm+(a-x)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a+x)p+bq}{ap+(a-x)q}$$

L. $x = \sqrt{a(a-b)}$.

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 2; 2) 1, 2, 1, 3, so erhält man

71. $$\frac{2a+x}{a+b-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+2b+x}{3a-2x}$$

72. $$\frac{3a+x}{2a+b-2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+3b+x}{4a-3x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a(a-b)}$.

Für die Lösung $x = \sqrt{ab}$ wäre die Aufgabe ebenfalls ausführbar; denn nach (45) hätte man nur $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\varrho = \frac{1}{2}$ zu setzen.

Für die Lösungen

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x = \sqrt{(a-b)(a+11b)} \text{ [vgl. 9]}$$

wäre die Aufgabe reell nicht ausführbar. Diese Lösungen sind nicht in der Formel (45) enthalten, wie man auch μ, ν und ϱ bestimmen mag. Man mufs daraus schliefsen: Es giebt keine quadratische Gleichung von der hier behandelten Form, welche eine der angeführten Lösungen hat.

k. In a. ist gezeigt, wie man Gleichungen von der hier behandelten Form aufstellt, indem man die Form der Gleichung als gegeben annimmt. Auch über die Lösung hatte man nach dem dort angegebenen Verfahren noch bis zu einem gewissen Grade zu verfügen. Doch war diese Entwickelung für eine bestimmte Lösung, wie sich später herausstellte, nicht erschöpfend. Weiter ist gezeigt, wie man aus symmetrischen Gleichungen des 4. Grades solche quadratische

Gleichungen ableitet. Die Entwickelung war erschöpfend, doch umständlich. Es bleibt nun noch ein dritter Weg übrig, nämlich von der Lösung auszugehen. Wir wollen die Aufgabe behandeln:

> Wie leitet man quadratische Gleichungen von der hier verlangten Form direkt aus einer vorhergegebenen Lösung ab?

Von der Lösung, welche gegeben ist, mufs zunächst vorausgesetzt werden, dafs sie in der Formel (45) enthalten ist. Dann ist die Aufgabe sehr einfach.

Es sei nach (45) ganz allgemein als Lösung gegeben

$$(48)\quad x = \sqrt{\mu^2 a^2 + 2\varrho ab + \nu^2 b^2}.$$

Dann kann man erstens setzen

$$(49)\quad x^2 = (\mu a - \nu b)^2 + 2(\varrho + \mu\nu)ab$$

$$x^2 - (\mu a - \nu b)^2 = 2(\varrho + \mu\nu)ab.$$

Hieraus ergiebt sich, indem wir der Kürze halber

$$(49_1)\quad \varrho + \mu\nu = \varrho_1$$

setzen, die Quotientengleichung

$$(50)\quad \frac{x + \mu a - \nu b}{2b} = \frac{\varrho_1 a}{x - \mu a + \nu b}$$

und hieraus nach e. und f. die allgemeine Gleichung

73. $\frac{(x + \mu a - \nu b)m + \varrho_1 an}{2bm + (x - \mu a + \nu b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x + \mu a - \nu b)p + \varrho_1 bq}{2ap + (x - \mu a + \nu b)q}$

L. $x = \sqrt{\mu^2 a^2 + 2\varrho ab + \nu^2 b^2}$.

Man kann aber zweitens auch setzen

$$(51)\quad x^2 = (\mu a + \nu b)^2 + 2(\varrho - \mu\nu)ab$$

$$x^2 - (\mu a + \nu b)^2 = 2(\varrho - \mu\nu)ab.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man der Kürze wegen

$$(51_1)\quad \varrho - \mu\nu = \varrho_2$$

setzt, die Quotientengleichung

$$(52)\quad \frac{x + \mu a + \nu b}{2b} = \frac{\varrho_2 a}{x - \mu a - \nu b}$$

und hieraus die allgemeine Gleichung

74. $$\frac{(x + \mu a + \nu b)m + \varrho_2 an}{2bm + (x - \mu a - \nu b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x + \mu a + \nu b)p + \varrho_2 bq}{2ap + (x - \mu a - \nu b)q}$$

L. $x = \sqrt{\mu^2 a^2 + 2\varrho ab + \nu^2 b^2}$.

In den Gleichungen 73 und 74 sind unendlich viele Gleichungen von der verlangten Form mit der gegebenen Lösung enthalten. Da die Lösung ganz allgemein ist und in derselben bei gehöriger Bestimmung von μ, ν und ϱ alle in diesem Abschnitt bisher vorgekommenen Lösungen enthalten sind, so sind in den Gleichungen 73 und 74 auch alle in diesem Abschnitt vorgekommenen Gleichungen, welche die hier verlangte Form haben, enthalten, nicht nur die speciellen, sondern auch die allgemeinen. Die beiden Gleichungen repräsentiren zwei grofse Klassen von unendlich vielen quadratischen Gleichungen, welche die Form und die Lösung gemeinsam haben. Wie man aber auch die willkürlichen Gröfsen in der einen allgemeinen Gleichung 73 oder 74 bestimmen mag, man wird keine Gleichung erhalten, welche in der andern allgemeinen Gleichung (74 oder 73) enthalten ist.

Um allgemeine Gleichungen von der hier verlangten Form aufstellen zu können, sind Quotientengleichungen von der Form (50) und (52) nötig, in welchen der Nenner links nur b, nicht auch x und a, der Zähler rechts nur a enthält, nicht auch x und b. Solcher Quotientengleichungen lassen sich aber, wie aus dem Obigen erhellt, aus einer gegebenen Lösung, welche die Form (48) haben mufs, nur zwei ableiten. Es liegt daher in der Eigentümlichkeit der für Gleichungen von der hier behandelten Art notwendigen Form der Lösung, dafs sich für eine gegebene Lösung zwei, aber auch nur zwei unendlich zahlreiche Klassen von Gleichungen aufstellen lassen, wie es oben in f. an besonderen Beispielen gezeigt ist. Aus der allgemeinen Entwickelung ist zugleich zu ersehen, dafs die Gleichungen der einen Klasse von denen der andern Klasse nicht wesentlich verschieden sind, dafs es daher nicht in der Eigentümlichkeit der Gleichungen liegt, die eine Klasse als die erste, die andere als die zweite anzusehen. Dies hat, wie schon oben bemerkt, nur einen Sinn, wenn die Gleichungen zu einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades in Beziehung stehen oder in Beziehung gebracht sind.

Ist für eine gegebene Lösung μ oder $\nu = 0$, wie es z. B. der Fall für die Lösungen

$$x = \sqrt{ab}, \quad x = \sqrt{a(a+b)},$$

so sind die Gleichungen (50) und (52) nicht verschieden, daher auch nicht die allgemeinen Gleichungen 73 und 74. Für eine solche Lösung giebt es nur eine einzige Klasse von Gleichungen mit der verlangten Form.

Es möge nun das oben an der Lösung (48) allgemein entwickelte Verfahren speciell an einigen Beispielen durchgeführt werden.

Es sei als Lösung

$$1) \quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben. Dann kann man erstens setzen

$$(53) \quad x^2 = (a-b)^2 + ab.$$

Es sind bei der Bildung des Quadrates, hier $(a-b)^2$, wie oben in (49), die Gröfsen a und b mit entgegengesetzten Zeichen genommen. — Dann hat man weiter:

$$x^2 - (a-b)^2 = ab$$

$$(54) \quad \frac{x+a-b}{b} = \frac{a}{x-a+b}.$$

Hieraus ergiebt sich nach dem mehrfach angewendeten Verfahren die allgemeine Gleichung

$$75. \quad \frac{(x+a-b)m + an}{bm + (x-a+b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x+a-b)p + bq}{ap + (x-a+b)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Aus dieser Gleichung ergeben sich bei geeigneter Bestimmung der willkürlichen Gröfsen die Gleichungen 37—39, 40—43 und 67—68. Auch die allgemeine Gleichung 66 folgt aus 75, wenn man in 75 $-m$ statt m, $2m+n$ statt n, $2p+q$ statt q setzt. So erhält man bezw. die Gleichungen 37, 40 und 67, wenn man für m, n, p und q bezw. setzt:

1) 2, 1, 1, 2; 2) 1, 1, 1, 1; 3) — 1, 3, 1, 3. Die angeführten Gleichungen müssen daher alle zu derselben Klasse gehören.

Man kann aber aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung 1) auch zweitens bilden

$$(55) \quad x^2 = (a+b)^2 - 3ab$$

$$(a+b)^2 - x^2 = 3ab$$

$$(56) \quad \frac{a+b+x}{3b} = \frac{a}{a+b-x}.$$

Ob man hier $a + b + x$ und $a + b - x$ vertauscht, ist gleichgültig, da das Zeichen von x, weil die Gleichung rein quadratisch ist, keinen Einflufs hat. Ebenso ist es gleichgültig, ob man die 3 unten bei b oder oben bei a setzt. Die Verhältnisse der willkürlichen Konstanten ändern sich dadurch nicht, und diese kommen hier nur in Betracht. — Aus (56) ergiebt sich die allgemeine Gleichung

$$76. \quad \frac{(a+b+x)m + an}{3bm + (a+b-x)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a+b+x)p + bq}{3ap + (a+b-x)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Alle durch diese allgemeine Gleichung repräsentirten Gleichungen gehören für die Lösung der andern Klasse an. Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

$$77. \quad \frac{2a+b+x}{2b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+4b-x}{b+4a-x}$$

$$78. \quad \frac{3a+b+x}{3b+a+x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a+5b-2x}{2b+5a-2x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Man wird sich vergebens bemühen, diese Gleichungen aus den allgemeinen 66 und 75 abzuleiten, wie man auch die oben angegebenen speciellen Gleichungen 37—39, 40—43 und 67—68 nicht aus der Gleichung 76 ableiten kann.

Entwickelt man jedoch bei (21) auch die Darstellungen von t_4:

$$\sqrt[4]{\frac{a-2b+2r}{4(b-2a+2r)}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a-b+r}{4(b-a+r)}},$$

so ergiebt sich aus der Gleichheit dieser, indem man x statt r setzt, die Gleichung

79. $\frac{a - 2b + 2x}{b - 2a + 2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - b + x}{b - a + x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Diese Gleichung mufs in Bezug auf die Gleichung (21) als Gleichung zweiter Klasse angesehen werden, gehört mit 37—39 nicht in dieselbe Klasse, ist daher nicht in der allgemeinen Gleichung 75, wohl aber in der Gleichung 76 enthalten. Man hat in 76 nur $m = 1$, $n = -2$, $p = 1$, $q = -2$ zu setzen. In Bezug auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades in (21) repräsentirt daher 75 alle Gleichungen erster Klasse und 76 alle Gleichungen zweiter Klasse.

Es sei als Lösung

$$2) \quad x = \sqrt{4a^2 + 3ab + 4b^2}$$

gegeben. Dann kann man erstens bilden:

$$x^2 = 4(a + b)^2 - 5ab$$

$$4(a + b)^2 - x^2 = 5ab$$

$$\frac{2a + 2b + x}{5b} = \frac{a}{2a + 2b - x}.$$

aber die allgemeine Gleichung

80. $\frac{(2a+2b+x)m+an}{5bm+(2a+2b-x)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(2a+2b+x)p+bq}{5ap+(2a+2b-x)q}$

L. $x = \sqrt{4a^2 + 3ab + 4b^2}$.

In dieser Gleichung sind die Gleichungen 6—10 und —65 enthalten. Setzt man für die willkürlichen Gröfsen der Reihe nach 1) $1, -3, 1, -3$; 2) $2, 1, 2, 1$, so erhält man bezw. die Gleichungen 6 und 64. Auch die allgemeine Gleichung 63 läfst sich leicht aus 80 ableiten.

Man kann aus der gegebenen Lösung auch zweitens bilden:

$$x^2 = 4(a - b)^2 + 11ab$$

$$\frac{x + 2a - 2b}{11b} = \frac{b}{x - 2a + 2b}.$$

$$\text{Vk. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Daher allgemein

81. $\frac{(x+2a-2b)m+an}{11bm+(x-2a+2b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x+2a-2b)p+bq}{11ap+(x-2a+2b)q}$

L. $x = \sqrt{4a^2+3ab+4b^2}$.

Die Gleichungen 80 und 81 repräsentiren die beiden Klassen unendlich vieler Gleichungen, welche von der hier verlangten Form für die gegebene Lösung möglich sind. Giebt 80 die Gleichungen erster Klasse, so giebt 81 die Gleichungen zweiter Klasse, und umgekehrt. Die Klasse ist nur bestimmbar, wenn eine zugehörige symmetrische Gleichung des 4. Grades gegeben ist.

Setzt man in 81 für die willkürlichen Konstanten der Reihe nach 1) 1, 1, 1, — 1; 2) 1, — 2, 1, 2, so erhält man bezw.

82. $\frac{x+3a-2b}{x+2a-3b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{13b-2a+x}{13a-2b-x}$

83. $\frac{x-2b}{x+2a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{7b+4a-2x}{7a+4b+2x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{4a^2+3ab+4b^2}$.

Es sei als Lösung

$$3)\quad x = \sqrt{4a^2-3ab+b^2}$$

gegeben. Dann kann man auf zweierlei Weise zerlegen:

$$x^2 = (2a-b)^2+ab$$

$$\frac{x+2a-b}{b} = \frac{a}{x-2a+b};$$

oder

$$x^2 = (2a+b)^2-7ab$$

$$\frac{2a+b+x}{7b} = \frac{a}{2a+b-x}.$$

Im ersten Fall erhält man die allgemeine Gleichung

84. $\frac{(x+2a-b)m+an}{bm+(x-2a+b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x+2a-b)p+bq}{ap+(x-2a+b)q}$

L. $x = \sqrt{4a^2-3ab+b^2}$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Konstanten 1) 1, 1, 1, 2; 2) 2, 1, 3, 1, so erhält man bezw.

85. $\frac{x + 3a - b}{x - 2a + 2b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + 2a + b}{2x - 3a + 2b}$

86. $\frac{2x + 5a - 2b}{x - 2a + 3b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3x + 6a - 2b}{x + a + b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{4a^2 - 3ab + b^2}$.

Im zweiten Fall erhält man

87. $\frac{(2a + b + x)m + an}{7bm + (2a + b - x)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(2a + b + x)p + bq}{7ap + (2a + b - x)q}$

L. $x = \sqrt{4a^2 - 3ab + b^2}$.

Setzt man für die willkürlichen Gröfsen bezw. 1) 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

88. $\frac{3a + b + x}{2a + 2b + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2a + 8b - x}{9a + b - x}$

89. $\frac{4a + b + x}{2a + 3b + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{4a + 9b - 2x}{11a + 2b - 2x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{4a^2 - 3ab + b^2}$.

Es sei als Lösung

$$4) \quad x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$$

gegeben. Dann kann man erstens bilden:

$$x^2 = (a - b)^2 + 36ab$$

$$\frac{x + a - b}{6b} = \frac{6a}{x - a + b}$$

90. $\frac{(x + a - b)m + 6an}{6bm + (x - a + b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x + a - b)p + 6bq}{6ap + (x - a + b)q}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

In dieser Gleichung sind die Gleichungen 15—17 enthalten. Setzt man z. B. $m = -1$, $n = 1$, $p = 1$, $q = -1$, so erhält man die Gleichung 15. Die Gleichung 90 repräsentirt daher in Bezug auf die symmetrische Gleichung des Grades in (5) die Gleichungen erster Klasse. Die Gleichung 18, eine Gleichung zweiter Klasse, ist daher nicht in derselben enthalten. Die Gleichungen 48—49 sind jedoch ebenfalls in 90 enthalten. Die allgemeinen Gleichungen 47 und 90 sind nur scheinbar verschieden. Setzt man in 47 n statt m, $m - n$ statt n, q statt p, $p - q$ statt q, so erhält man 90.

$$\text{Vk. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Man kann zweitens bilden:

$$x^2 = (a + b)^2 + 32ab$$

$$\frac{x - a - b}{16b} = \frac{2a}{x + a + b}$$

91. $$\frac{(x - a - b)m + 2an}{16bm + (x + a + b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x - a - b)p + 2bq}{16ap + (x + a + b)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Setzt man hierin $m = 1$, $n = 1$, $p = 1$, $q = 1$, so erhält man die Gleichung 18, welche in Bezug auf (5) zur zweiten Klasse gerechnet werden mufs. Die Gleichung 91 repräsentirt daher in Bezug auf die Gleichung (5) die Gleichungen zweiter Klasse. In derselben sind auch die Gleichungen 56—58 enthalten. Man erhält z. B. 56, wenn man $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$, $q = 2$ setzt. Die allgemeinen Gleichungen 91 und 55 lassen sich leicht auf einander reduciren.

Als charakteristische Eigenschaft einer quadratischen Gleichung von der hier behandelten Form, die in Bezug auf eine symmetrische Gleichung des 4. Grades zur zweiten Klasse gerechnet werden mufs, ist oben in f. bei 1) angegeben, dafs sie aus Darstellungen von t_4 abgeleitet ist oder doch aus solchen Darstellungen als abgeleitet gedacht werden kann. Dann hat eine solche Gleichung, wenn ihre Glieder nicht umgestellt sind, nach der Theorie der symmetrischen Gleichungen, wie es in Ec. und in [II. 236] entwickelt ist, die Eigentümlichkeit, dafs die Produkte aus Nenner und Zähler links und rechts Quadrate sind. Eine solche Eigentümlichkeit haftet, wie es schon oben in g. bemerkt ist, jedoch nur einer einzigen Gleichung zweiter Klasse an, die Gleichung nicht gerechnet, welche durch Umkehrung des Zeichens von x entsteht. Alle andern Gleichungen zweiter Klasse haben diese Eigentümlichkeit nicht.

Aus den Darstellungen von t_4 in (6) ergeben sich die Gleichungen:

(57) $$\frac{17a + b - x}{17b + a - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a - b}{x + b - a}$$

(57₁) $$\frac{a - b + x}{b - a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a + 17b + x}{b + 17a + x}.$$

$$\text{Vk. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Diese müssen in Bezug auf (5) als Gleichungen zweiter Klasse angesehen werden. Die zweite unterscheidet sich von der ersten nur durch das Zeichen von x. Die Gleichung (57) hat die angegebene Eigentümlichkeit; es ist

$$(17a + b - x)(17b + a - x) = (3a + 3b - 3x)^2$$

$$a(x + a - b) \cdot b(x + b - a) = 36a^2b^2.$$

Die Produkte aus Nenner und Zähler sind Quadrate. Die Gleichung (57_1) hat diese Eigentümlichkeit nur dann, wenn man sie so schreibt:

$$\frac{17a + b + x}{17b + a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x - a + b}{x + a - b},$$

oder wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt, wodurch jedoch die Form gestört wird.

Die Gleichung (57) ist in der allgemeinen Gleichung 91 enthalten; sie ergiebt sich aus derselben für $m = -1$, $n = 8$, $p = -1$, $q = 8$. Daher ist in Bezug auf (5) die Gleichung 91 als die allgemeine Gleichung zweiter Klasse anzusehen. Aber keine andere Gleichung von allen, die man aus 91 ableiten kann, wie man auch m, n, p und q bestimmen mag, wird die angegebene Eigentümlichkeit ebenfalls haben. An allen andern aus 91 abgeleiteten Gleichungen wird man daher kein unterscheidendes Merkmal finden können, weshalb man sie gerade zur zweiten Klasse rechnen mufs.

Es ist oben weiter gezeigt, dafs die Gleichung 90 in Bezug auf (5) die Gleichungen erster Klasse repräsentirt. Aber unter diesen Gleichungen, welche wegen ihrer Entstehung in Bezug auf (5) als zur ersten Klasse gehörig angesehen werden können, giebt es eine, welche die Eigentümlichkeit hat, von der oben gezeigt ist, dafs sie einer Gleichung zweiter Klasse anhaftet. Setzt man in 90 $m = -1$, $n = 3$, $p = 1$, $q = 3$, so erhält man mit Vertauschung des Nenners links und des Zählers rechts

$$\frac{17a + b - x}{17b + a + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x - a - b}{x + a + b}.$$

Hier ist:

$$(17a + b - x) \cdot (17b + a + x) = 8(a - b + x)^2$$
$$a(x - a - b) \cdot b(x + a + b) = 32a^2b^2.$$

Die Produkte aus Nenner und Zähler sind also Quadrate, wenn man in den Nennern oder in den Zählern noch den Faktor 2 hinzufügt.

Damit ist für die specielle Lösung 4) gezeigt, dafs die Gleichungen, welche durch die Gleichung 90 repräsentirt sind, an sich von den Gleichungen, welche durch die Gleichung 91 repräsentirt sind, nicht unterschieden werden können. Für eine bestimmte Lösung giebt es zwar zwei unendlich zahlreiche von einander gesonderte Klassen von derselben Form; die eine Klasse als erste, die andere als zweite zu bezeichnen kann jedoch nur in Bezug auf eine bestimmte symmetrische Gleichung des 4. Grades als begründet angesehen werden.

Es sei als Lösung

$$5) \quad x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben. Man kann erstens bilden:

$$x^2 = (3a - 3b)^2 + 4ab$$

$$(58) \quad \frac{x + 3a - 3b}{2b} = \frac{2a}{x - 3a + 3b}.$$

Man kommt so auf die allgemeine Gleichung, welche schon in 45 für diese Lösung aufgestellt ist.

Man kann zweitens bilden:

$$x^2 = (3a + 3b)^2 - 32ab$$

$$(59) \quad \frac{3a + 3b - x}{16b} = \frac{2a}{3a + 3b + x}.$$

Man kommt so auf eine allgemeine Gleichung, welche dieselben speciellen Gleichungen einschliefst, welche 50 einschliefst.

Es sei als Lösung

$$6) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Vk. } \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{B}.$$

gegeben. Dann kann man erstens bilden:

$$x^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\frac{a + b + x}{2b} = \frac{a}{a + b - x}, \text{ also}$$

92. $\frac{(a + b + x)m + an}{2bm + (a + b - x)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a + b + x)p + bq}{2ap + (a + b - x)q}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Gleichung umfaſst dieselben speciellen Gleichungen, welche 62 umfaſst.

Man kann auch zweitens bilden:

$$x^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

$$\frac{x + a - b}{2b} = \frac{a}{x - a + b}, \text{ also}$$

93. $\frac{(x + a - b)m + an}{2bm + (x - a + b)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(x + a - b)p + bq}{2ap + (x - a + b)q}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

In dieser Gleichung sind die Gleichungen 34—36 enthalten. Die Gleichung 69 läſst sich auf 93 reduciren, und umgekehrt.

Es sei schlieſslich als Lösung

$$7)\ x = \sqrt{ab}$$

gegeben. Man kann hier nur bilden

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{x}.$$

Es kann hier daher nur eine Klasse von Gleichungen mit der verlangten Form geben. Man erhält

94. $\frac{mx + an}{bm + nx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{px + bq}{ap + qx}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Gröſsen bezw. 1) 2, 1, 2, 1; 2) 3, 1, 3, 1; 3) 1, n, 1, n; 4) 1, n, 1, m, so erhält man mit Vertauschung des Nenners links und des Zählers rechts:

95. $\frac{a + 2x}{b + 2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + 2b}{x + 2a}$

96. $\frac{a + 3x}{b + 3x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + 3b}{x + 3a}$

97. $\frac{x + an}{x + bn} = \frac{a}{b} \cdot \frac{nx + b}{nx + a}$

98. $\frac{a + mx}{b + nx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + bm}{x + an}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

l. Es wird hiernach noch von Interesse sein, etw näher auf die oben bei 1) in f. ausgesprochene Behauptu einzugehen: Gleichungen von der hier behandelt Form, welche in Bezug auf eine symmetrische Gl chung des 4. Grades zur ersten Klasse gehöre können in Bezug auf eine andere symmetrische Gl chung des 4. Grades sehr wohl als zur zweiten Klas gehörend angesehen werden und umgekehrt.

Sucht man für eine bestimmte Lösung (48), indem m aus derselben die Gleichung (50) bildet und nach h. in (r statt x und diese Quotienten gleich $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$ setzt, die gehörige symmetrische Gleichung des 4. Grades, entwick aus dieser die Darstellungen von t und aus diesen D stellungen wieder die quadratischen Gleichungen von der k verlangten Form, so müssen diese in der allgemeinen G chung 73 enthalten sein; die Gleichung 73 repräsentirt d für die zugehörige symmetrische Gleichung des 4. Gra die Gleichungen erster Klasse. Entwickelt man aus der s metrischen Gleichung die Darstellungen von t_4 und bil aus diesen die betreffende quadratische Gleichung, so m diese nach den bisherigen Erörterungen der zweiten Kla angehören. Alle Gleichungen, welche für die Lösung (nicht in 73 enthalten sind, müssen in 74 enthalten s folglich auch die so entwickelte Gleichung zweiter Klas In diesem Fall mufs also die Gleichung 74 in Bezug auf betreffende symmetrische Gleichung des 4. Grades die G chungen zweiter Klasse repräsentiren. — Geht man für d selbe Lösung (48) umgekehrt von der Gleichung (52) aus, setzt diese Quotienten, nachdem x mit r vertauscht ist, gleich $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$ und bildet die zugehörige symmetrische Gleichung, so wird in Bezug auf diese die Gleichung 74 alle Gleichungen erster Klasse und die Gleichung 73 alle Gleichungen zweiter Klasse repräsentiren.

Wir wollen diese allgemeinen Erörterungen an einem besonderen Beispiele durchführen. Es sei die schon oft benutzte Lösung

$$x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben. Bildet man aus dieser Lösung erstens die Quotientengleichung (58), so erhält man nach h. als zugehörige symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$(60) \quad \frac{(x^2 - xy + y^2)(x+y)^2}{(x^2 + xy + y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b},$$

die oben in (7) aufgeführt ist. Aus den in (8) angegebenen Darstellungen von t, welche aus (7) oder (60) sich entwickeln lassen, ergeben sich, indem man x statt r setzt, als Gleichungen von der hier verlangten Form:

$$(61) \quad \frac{7a - 9b + 3x}{3a + 3b - x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{9a - 7b + 3x}{3a + 3b + x} \quad \text{aus 5 und 10}$$

$$(62) \quad \frac{7a - 9b + 3x}{7b - 9a + 3x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a - 3b + x}{3b - 3a + x} \quad \text{aus 11 und 12.}$$

Die Gleichung (61) mufs nach 1) in f. für die symmetrische Gleichung (60) als eine Gleichung erster Klasse, die Gleichung (62) als eine Gleichung zweiter Klasse angesehen werden. Für die Gleichung (61) ist die allgemeine Gleichung in 45 aufgestellt*). Die Gleichung 45 repräsentirt daher in Bezug auf (60) die Gleichungen erster Klasse. Für die Gleichung (62) ist die allgemeine Gleichung in 50 aufgestellt. Die Gleichung 50 mufs daher für (60) die Gleichungen zweiter Klasse repräsentiren.

Bildet man aus der oben gegebenen Lösung zweitens

*) Setzt man in 45 $m = 3$, $n = -1$, $p = 3$, $q = 1$, so erhält man (61) oder (66). — Ebenso erhält man (62) oder (65) aus 50, wenn man $m = 3$, $n = -1$, $p = 3$, $q = -1$ setzt.

zunächst die Quotientengleichung (59), so erhält man nach
h. als zugehörige symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$(63) \quad \frac{(5x^2 + 22xy + 5y^2)(x+y)^2}{2(x^2 + 4xy + y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

Aus dieser Gleichung, die schon oben in h. bei 2) aufgefüh
ist, findet man als Darstellungen von t, ganz denen in (
entsprechend:

$$1.\ \sqrt{\frac{3a+3b-r}{16b}} \qquad 2.\ \sqrt{\frac{2a}{3a+3b+r}}$$

$$3.\ \sqrt{\frac{a+3b-r}{13b-3a-r}} \qquad 4.\ \sqrt{\frac{5a+3a-r}{3a+19b+r}}$$

$$5.\ \sqrt{\frac{7a-9b+3r}{8(3a-3b+r)}} \qquad 6.\ \sqrt{\frac{3a-3b+r}{9a-7b+3r}}$$

$$7.\ \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{13b-3a+r}{8(a+3b+r)}} \qquad 8.\ \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{3a+19b-r}{8(5a+3b+r)}}$$

$$9.\ \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{3b-3a+r}{9b-7a+3r}} \qquad 10.\ \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{7b-9a+3r}{8(3b-3a+2r)}}$$

$$11.\ \sqrt[4]{\frac{3r+7a-9b}{8(3r+9a-7b)}} \quad 12.\ \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{3a+3b-r}{8(3a+3b+r)}} \quad 13.\ \sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{7b-9a+}{8(9b-7a+-}}$$

$$r = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}.$$

Die 5. und 6. Darstellung sind bezw. die für t mit d
Indices $5x^2 + 22xy + 5y^2$ und $x^2 + 4xy + y^2$. Sie si
nach Ec. gefunden.

Aus diesen Darstellungen ergeben sich, indem man
statt r setzt, die Gleichungen:

$$(65) \quad \frac{7a - 9b + 3x}{3a - 3b + x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{7b - 9a + 3x}{3b - 3a + x} \text{ aus 5 und 1}$$

$$(66) \quad \frac{3x + 7a - 9b}{3x + 9a - 7b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{3a + 3b - x}{3a + 3b + x} \text{ aus 11 und } \ldots 2.$$

Nach 1) in f. muss die Gleichung (65) in Bezug a uf
(63) als eine Gleichung erster Klasse angesehen werd n.
Die Gleichung (65) ist aber identisch mit der Gleichu g
(62), welche für (64) eine Gleichung zweiter Klasse war.
Ebenso muss nach 1) in f. die Gleichung (66) für (63) ls
eine Gleichung zweiter Klasse gelten. Diese Gleichung t
aber identisch mit (61), welche für (60) als Gleichung erst r

Klasse gelten mufste. — Die Gleichung (65) ist in der Gleichung 50 enthalten; diese mufs also für (63) die Gleichungen erster Klasse repräsentiren. Die Gleichung (66) ist in der Gleichung 45 enthalten; diese mufs also für (63) die Gleichungen zweiter Klasse repräsentiren.

Damit ist nachgewiesen, dafs alle quadratischen Gleichungen von der hier verlangten Form mit der angegebenen Lösung, welche in Bezug auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades in (60) als Gleichungen erster Klasse gelten müssen, in Bezug auf die symmetrische Gleichung des 4. Grades in (63) zur zweiten Klasse gehören, und umgekehrt, dafs die Gleichungen, welche für (60) zur zweiten Klasse gehören, für (63) als zur ersten Klasse gehörig angesehen werden müssen.

m. Bisher ist in diesem Abschnitt nur von reinen quadratischen Gleichungen die Rede gewesen. Es ist daher noch die Frage zu beantworten:

Läfst sich jede vollständige quadratische Gleichung auf die hier behandelte Form bringen?

Ganz genau lassen sich nur solche vollständige quadratische Gleichungen auf diese Form bringen, welche die Wurzeln a und b haben, d. h. allgemein die Gleichung

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0.$$

Diese Gleichung ist in eine Quotientengleichung von der Form (50) oder (52) zu verwandeln. Man hat

$$(a + b - x)\, x = ab$$

$$\frac{a + b - x}{b} = \frac{a}{x}.$$

Hieraus in der bekannten Weise allgemein

99. $$\frac{(a + b - x)m + an}{bm + nx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a + b - x)p + bq}{ap + qx}$$

L. $x = a, b$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Gröfsen bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 2, 1, 2, 1; 3) 1, 2, 1, 2; 4) 1, n, 1, n; 5) 1, $n - 1$, 1, $n - 1$, so erhält man:

100. $\frac{2a+b-x}{2b+a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b+x}{a+x}$ [87_5]

101. $\frac{3a+2b-2x}{3b+2a-2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2b+x}{2a+x}$ [87_7]

102. $\frac{3a+b-x}{3b+a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b+2x}{a+2x}$ [87_6]

103. $\frac{(n+1)\,a+b-x}{(n+1)\,b+a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{nx+b}{nx+a}$

104. $\frac{an+b-x}{bn+a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(n-1)x+b}{(n-1)x+a}$

L. $x = a,\ b$.

Setzt man in den letzten 3 Gleichungen bezw. 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $a = 4$, $b = 5$; 3) $a = 5$, $b = 6$, so erhält man

105. $\frac{13-x}{15-x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4+2x}{3+2x}$ L. $x = 3,\ 4$.

106. $\frac{4n+9-x}{5n+9-x} = \frac{4}{5} \cdot \frac{nx+5}{nx+4}$ L. $x = 4,\ 5$.

107. $\frac{5n+6-x}{6n+5-x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{(n-1)x+6}{(n-1)x+5}$ L. $x = 5,\ 6$.

VI. $\frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}$.

32. $\frac{2a+5b+3x}{3a-5b+2x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{3a-b+2x}{2a-b+3x}$

L. $x = \pm a$.

32_1. $\frac{3a+b+x}{3a-b+x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{4a-2b-x}{4a+2b-x}$

L. $x = \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

32_2. $\frac{3a+5b+x}{a-5b+x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{3a+b+x}{a-b+x}$

L. $x = \sqrt{5a^2-6ab+5b^2}$.

32_3. $\frac{2a+x}{2x+a} = \frac{4a-b}{4b-a} \cdot \frac{2b-x}{2x-b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

32_4. $\frac{11a + 5b - x}{7a + 9b + 3x} = \frac{3a + b}{3b + a} \cdot \frac{3a + 5b - x}{3b + 5a + x}$

L. $x = \pm (a - b)$.

32_5. $\frac{a + 3b + x}{a - 3b + x} = \frac{3a + 5b}{3a - 5b} \cdot \frac{3b - a + x}{3b + a - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

32_6. $\frac{3a + b - x}{3a - b + x} = \frac{4a + 3b}{4a - 3b} \cdot \frac{3(x - b) - a}{3(x - b) + a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

32_7. $\frac{7a + b + 2x}{7b + a + 2x} = \frac{15a + b}{15b + a} \cdot \frac{x + 4b}{x + 4a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

32_8. $\frac{3x - a + 7b}{3x - b + 7a} = \frac{5a - 2b}{5b - 2a} \cdot \frac{x - 5a + 7b}{x - 5b + 7a}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

32_9. $\frac{7a + 3b - x}{7b + 3a + x} = \frac{6a + b}{6b + a} \cdot \frac{5x - 7a + 13b}{5x + 7b - 13a}$

L. $x = \sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$.

32_{10}. $\frac{3x + 13a + 5b}{3x + 13b + 5a} = \frac{10a - b}{10b - a} \cdot \frac{x - 3a + 9b}{x - 3b + 9a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

32_{11}. $\frac{9a + 4b - 5x}{9b + 4a - 5x} = \frac{7a - 3b}{7b - 3a} \cdot \frac{7a + 2b + 5x}{7b + 2a + 5x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$.

a. Die Gleichungen sind rein quadratisch und haben die Form

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Die Deduktionen des 5. Abschnitts lassen sich gröſstenteils leicht auf Gleichungen übertragen, wie sie hier oben angegeben sind. Die Form dieser Gleichungen ist ähnlich, wie diejenige der dort behandelten, nur steht rechts statt des konstanten Faktors $\frac{a}{b}$ ein anderer ebenfalls konstanter Faktor.

Um Gleichungen von der oben stehenden Form zu erhalten, z. B. von der Form $32-32_2$, kann man in den Gleichungen des vorigen Abschnitts $a+b$ statt a, $a-b$ statt b setzen. So folgt aus der Gleichung 29, die vorn in V aufgeführt ist, wenn man zugleich $2x$ statt x setzt,

1. $\frac{3a+4b+x}{3a-4b+x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{3a-2b+x}{3a+2b+x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 8b^2}$.

In derselben Weise ergiebt sich aus 31 vorn in V, indem man ebenfalls $2x$ statt x setzt,

2. $\frac{x+b}{x-b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{x+3a-2b}{x+3a+2b}$

L. $x = \sqrt{3a^2 - 2b^2}$.

Ebenso ergiebt sich aus der Gleichung 3 in Va. die Gleichung 32_1. — Ebenso folgt aus 31_1 vorn in V

3. $\frac{5a+3b+x}{5a-3b+x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{8a-2b-3x}{8a+2b-3x}$

L. $x = \sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Will man andere konstante Faktoren haben, so mufs man die Substitution dem angenommenen konstanten Faktor entsprechend machen. Sollen die konstanten Faktoren

$$\frac{2a+b}{2b+a}, \quad \frac{2a-b}{2b-a}, \quad \frac{3a-2b}{3b-2a}$$

werden, so hat man in irgend einer der Gleichungen des vorigen Abschnitts 1) $2a+b$ statt a, $2b+a$ statt b; 2) $2a-b$ statt a, $2b-a$ statt b; 3) $3a-2b$ statt a, $3b-2a$ statt b zu setzen. Macht man diese Substitutionen z. B. in der Gleichung 31_3, so erhält man bezw.

4. $\frac{3a+3b-x}{3a+3b+x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{2x-3a}{2x+3b}$

L. $x = \sqrt{3(a^2+ab+b^2)}$.

5. $\frac{a+b-x}{a+b+x} = \frac{2a-b}{2b-a} \cdot \frac{2x-5a+4b}{2x+5b-4a}$

L. $x = \sqrt{7a^2 - 13ab + 7b^2}$.

6. $\frac{a+b-x}{a+b+x} = \frac{3a-2b}{3b-2a} \cdot \frac{2x-8a+7b}{2x-7a+8b}$

L. $x = \sqrt{19a^2 - 37ab + 19b^2}$.

b. Man kann diese Substitutionen auch in den symmetrischen Gleichungen des 4. Grades machen oder einfacher in den aus jenen entwickelten Darstellungen von t. Aus diesen kann man dann, wie das oben in Ve. gezeigt ist, die allgemeine Gleichung bilden und aus dieser wieder beliebig viele specielle Gleichungen hinschreiben. Setzt man z. B. in der 1. und 2. Darstellung von t bei (8) in Vb $2a + b$ statt a, $2a - b$ statt b, so erhält man aus denselben, wenn man noch $4x$ statt r setzt, die Gleichung

$$(2) \quad \frac{2x+3b}{2a-b} = \frac{2a+b}{2x-3b}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$.

Aus dieser hat man nach der im vorigen Abschnitt vielfach angewendeten Methode, wenn man die Werte der beiden Quotienten mit X bezeichnet:

$$1) \quad X = \frac{2x+3b}{2a-b} = \frac{2a+b}{2x-3b}$$

$$2) \quad X = \frac{2a+b}{2a-b} \cdot \frac{2x+3b}{2a+b} = \frac{2a+b}{2a-b} \cdot \frac{2a-b}{2x-3b}.$$

Drückt man in beiden Fällen nach dem KS. X allgemein aus und setzt die so gebildeten Quotienten einander gleich, so erhält man

7. $\frac{(2x+3b)m+(2a+b)n}{(2a-b)m+(2x-3b)n} = \frac{2a+b}{2a-b} \cdot \frac{(2x+3b)p+(2a-b)q}{(2a+b)p+(2x-3b)q}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Gröfsen m, n, p und q bezw. 1) 1, — 1, 1, 1; 2) 1, 1, 1, 2, so giebt das:

8. $\frac{b-a+x}{b+a-x} = \frac{2a+b}{2a-b} \cdot \frac{x+a+b}{x+a-b}$

9. $\frac{a+2b+x}{a-2b+x} = \frac{2a+b}{2a-b} \cdot \frac{2x+4a+b}{4x+2a-5b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$.

$$\text{VIb.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Setzt man in denselben Darstellungen von t bei (8) in Vb. $2a + b$ statt a, $2b + a$ statt b und zugleich x statt r, so giebt das zunächst

$$(3)\quad \frac{3a - 3b + x}{2(2b + a)} = \frac{2(2a + b)}{3b - 3a + x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{17a^2 + 2ab + 17b^2}.$$

Hieraus hat man nach dem bei (2) angewendeten Verfahren die allgemeine Gleichung

$$\textbf{10.}\quad \frac{(3a - 3b + x)m + 2(2a + b)n}{2(2b + a)m + (3b - 3a + x)n} = \frac{2a + b}{2b + a} \cdot \frac{(3a - 3b + x)p + 2(2b + a)q}{2(2a + b)p + (3b - 3a + x)q}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{17a^2 + 2ab + 17b^2}.$$

Setzt man hierin für die willkürlichen Grössen bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, — 1, 2, so giebt das:

$$\textbf{11.}\quad \frac{x + 7a - b}{x + 7b - a} = \frac{2a + b}{2b + a} \cdot \frac{x + 5a + b}{x + 5b + a}$$

$$\textbf{12.}\quad \frac{11a + b + x}{11b + a - x} = \frac{2a + b}{2b + a} \cdot \frac{x - 2a + 5b}{x + 2b - 5a}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{17a^2 + 2ab + 17b^2}.$$

c. Noch einfacher kann man diese Substitutionen in den Quotientengleichungen machen, wie sie in Vk. angegeben und aufgestellt sind. Diese lassen sich auch, wie dort gezeigt ist, leicht direkt aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung bilden.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

ist in Vk. unter (54) die Quotientengleichung

$$\frac{x + a - b}{b} = \frac{a}{x - a + b}$$

gebildet. Setzt man hierin $a + b$ statt a, $a - b$ statt b, so hat man

$$(4)\quad \frac{x + 2b}{a - b} = \frac{a + b}{x - 2b}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 3b^2}.$$

Daher allgemein

$$\textbf{13.}\quad \frac{(x + 2b)m + (a + b)n}{(a - b)m + (x - 2b)n} = \frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{(x + 2b)p + (a - b)q}{(a + b)p + (x - 2b)q}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 3b^2}.$$

VIc. $\frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Gröfsen bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, — 2, so erhält man:

14. $\frac{x+a+3b}{x+a-3b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{x+a+b}{x+a-b}$

15. $\frac{x+2a+4b}{x-2a+4b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-5b+2x}{a+5b-2x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2+3b^2}$.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2+b^2}$$

ist oben in Vk. bei 6) die Quotientengleichung gebildet oder kann leicht direkt aufgestellt werden

$$\frac{a+b+x}{2b} = \frac{a}{a+b-x}.$$

Setzt man hierin $2a+b$ statt a, $2b+a$ statt b, so erhält man

$$\frac{3a+3b+x}{2(2b+a)} = \frac{2a+b}{3a+3b-x}$$

L. $x = \sqrt{5a^2+8ab+5b^2}$.

Daher die allgemeine Gleichung

16. $$\frac{(3a+3b+x)m+(2a+b)n}{2(2b+a)m+(3a+3b-x)n} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{(3a+3b+x)p+(2b+a)q}{2(2a+b)p+(3a+3b-x)q}$$

L. $x = \sqrt{5a^2+8ab+5b^2}$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Konstanten bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, — 1, 1, — 1, so erhält man:

17. $\frac{5a+4b+x}{5b+4a+x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{5a+7b-x}{5b+7a-x}$

18. $\frac{a+2b+x}{b+2a+x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{x-a+b}{x-b+a}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{5a^2+8ab+5b^2}$.

Selbstverständlich kann man solche Substitutionen auch direkt in den allgemeinen Gleichungen machen, die im vorigen Abschnitt aufgestellt sind. Setzt man in V. 94 $a+b$ statt a, $a-b$ statt b, so erhält man

19. $\frac{mx + (a+b)n}{(a-b)m + nx} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{px + (a-b)q}{(a+b)p + qx}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Gröfsen bezw. 1) 1, 2, 1, 2; 2) 2, 3, 2, 3, so erhält man mit Vertauschung des Nenners links und des Zählers rechts:

20. $\frac{x + 2a + 2b}{x + 2a - 2b} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a - b + 2x}{a + b + 2x}$

21. $\frac{2x + 3a + 3b}{2x + 3a - 3b} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{2a - 2b + 3x}{2a + 2b + 3x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

d. Die auf den angegebenen Wegen aufgestellten Gleichungen liefern, wie aus dem Obigen zu ersehen ist, meistens nur ungeschickte oder doch unzierliche Resultate; man hat über das Resultat nicht zu verfügen. Wir wollen daher Gleichungen von der oben stehenden Form direkt aufzustellen suchen, ohne die im vorigen Abschnitt vorkommenden Gleichungen zu benutzen. Wir stellen uns mithin die Aufgabe:

Reine quadratische Gleichungen von der Form

$$(5)\quad \frac{\vartheta a + \eta b + \zeta x}{\vartheta_1 a + \eta_1 b + \zeta_1 x} = \frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\cdot\frac{\vartheta_2 a + \eta_2 b + \zeta_2 x}{\vartheta_3 a + \eta_3 b + \zeta_3 x}$$

zu bilden, die eine nicht unzierliche Lösung haben. Die griechischen Buchstaben sind Zahlenkoefficienten.

Die Aufgabe, welche in dieser Allgemeinheit nicht ohne Schwierigkeit zu sein scheint, wird mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Gleichungen des 4. Grades leicht und vollständig gelöst.

Nach den Erörterungen im vorigen Abschnitt, besonders nach Ve, mufs eine symmetrische Gleichung des 4. Grades, welche auf Darstellungen von t führen soll, aus denen sich quadratische Gleichungen von der dort behandelten Form mit dem konstanten Faktor $\frac{a}{b}$ ableiten lassen, die Form haben:

$$(6)\quad \frac{(\alpha x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha y^2)(x+y)^2}{(\beta x^2 + 2\beta_1 xy + \beta y^2)(x-y)^2} = \frac{a}{b}.$$

iese liefert nach (12) in Vc, wenn man die zugehörigen ırstellungen von t sucht,

$$r = \sqrt{(\beta+\beta_1)^2 a^2 + 2(\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1)ab + (\alpha-\alpha_1)^2 b^2}.$$

ɜs r wird schliefslich die Lösung der quadratischen Gleiıng. Die Gröfsen α, α_1, β und β_1 stehen zur Verfügung, der Lösung eine zierliche Form zu geben.

Für die oben gestellte Aufgabe nehmen wir zunächst, ılich, wie es im ganzen vorigen Abschnitt geschehen ist, ı konstanten Faktor

$$(8) \quad \frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}$$

gegeben an. Im vorigen Abschnitt war der konstante ctor $\frac{a}{b}$. Wir werden also, um den konstanten Faktor (8) erhalten, in (6) und (7) nur $\mu a + \nu b$ statt a, $\mu_1 a + \nu_1 b$ tt b zu setzen haben. Dann sind aus der so entstehenden ametrischen Gleichung des 4. Grades die Darstellungen ı t zu suchen. Diese liefern dann, wie es im vorigen Abnitt wiederholt gezeigt ist, leicht die gewünschten quatischen Gleichungen. Ein Beispiel wird das Verfahren genüge erklären.

Der konstante Faktor möge

$$(9) \quad \frac{a+b}{a-b}$$

a. Dann ist in (6) und (7) $a+b$ statt a, $a-b$ statt b setzen. Aus (7) erhält man

$$) \; r^2 = (\beta+\beta_1)^2(a+b)^2 + 2(\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1)(a^2-b^2) + (\alpha-\alpha_1)^2(a-b)^2.$$

mit der Wert von r möglichst einfach wird, kann man zen:

) $\beta+\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha-\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{4}$.

ın wird

$$r = \pm a.$$

) $\beta+\beta_1 = 0$, $\alpha-\alpha_1 = 0$, $\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1 = \frac{1}{2}$.

ın wird

$$r = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

VId. $\frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}$.

Soll das Resultat in Bezug auf a und b symmetrisch sein, so mufs das Glied mit $a^2 - b^2$ in (10) verschwinden. Wir gelangen zu den einfachsten Ausdrücken, wenn wir setzen:

3) $\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1 = 0, \ \beta + \beta_1 = 1, \ \alpha - \alpha_1 = 1.$

Dann wird

$$r = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

4) $\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1 = 0, \ \beta + \beta_1 = 2, \ \alpha - \alpha_1 = 1.$

Dann wird

$$r = \sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}.$$

Der erste Fall ist der einfachste Fall. Er läfst sich sehr leicht direkt behandeln, wie wir weiter unten sehen werden. Wir wollen ihn jedoch hier vornehmen, um zu zeigen, dafs auch für einen solchen Fall die symmetrischen Gleichungen des 4. Grades zur Lösung der oben gestellten Aufgabe ausreichend sind.

Die drei Gleichungen bei 1) werden am einfachsten erfüllt durch

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = \tfrac{1}{2}, \quad \beta_1 = 0.$$

Dann geht (6) mit Berücksichtigung von (9) über in

$$(11) \quad \frac{(x^2 + y^2)(x + y)^2}{(x^2 + y^2)(x - y)^2} = \frac{a + b}{a - b}.$$

Der gemeinsame Faktor $x^2 + y^2$ darf nicht fortgehoben werden, weil sonst die Gleichung nicht mehr vom 4. Grade sein würde. Man findet nach dem bekannten Verfahren

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{a + r}{b} = \frac{0}{a - r} \text{ für } r = \sqrt{a^2}.$$

Hieraus ergeben sich als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{a + r + 2b}{a + r - 2b}} = \sqrt{\frac{a - r}{r - a}} = \sqrt{\frac{r + b}{a - b}} = \sqrt{\frac{a + b}{r - b}}.$$

Die beiden letzten Darstellungen von t, welche aus den beiden ersten nach dem KS. durch Addition und Subtraktion gefunden sind, sind die für t mit den Indices $x - y$ und

$x + y$. Setzt man diese einander gleich und x statt r, so hat man

$$(12) \quad \frac{x+b}{a-b} = \frac{a+b}{x-b}.$$

Hiermit folgt nach der schon oft angewendeten Methode die allgemeine Gleichung

22. $$\frac{(x+b)m + (a+bn)}{(a-b)m + (x-b)n} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{(x+b)p + (a-b)q}{(a+b)p + (x-b)q}$$

L. $x = \pm a$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Gröfsen bezw. 1) 1, 1, 1, $-$ 1; 2) 1, 2, 1, 2; 3) 3, 2, 2, 3, so erhält man:

23. $$\frac{x+a+2b}{x+a-2b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{2b-a+x}{2b+a-x}$$

24. $$\frac{x+2a+3b}{x+2a-b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-3b+2x}{a-b+2x}$$

25. $$\frac{2a+5b+3x}{3a-5b+3x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{3a-b+2x}{2a-b+3x} \quad [32] \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \pm a$.

Für den vierten Fall werden die Bedingungen in 4) am einfachsten erfüllt, wenn man

$$\alpha = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta = \tfrac{3}{2}, \quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}$$

setzt. Dann geht (6) mit Rücksicht auf (9) über in

$$(13) \quad \frac{2(x^2+y^2)(x+y)^2}{(3x^2+2xy+3y^2)(x-y)^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Hieraus ergeben sich in der bekannten Weise die Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{3a+5b+r}{a-5b+r}} = \sqrt{\frac{b-a+r}{3a+b-r}} = \sqrt{\frac{a+3b+r}{2(a-b)}} = \sqrt{\frac{2(a+b)}{r-a-3b}},$$

$$r = \sqrt{5a^2+6ab+5b^2}.$$

Aus der 3. und 4. Darstellung hat man, wenn man x statt r setzt,

$$(14) \quad \frac{a+3b+x}{2(a-b)} = \frac{2(a+b)}{x-a-3b}$$

und daher allgemein:

26. $$\frac{(a+3b+x)m + 2(a+b)n}{2(a-b)m + (x-a-3b)n}$$
$$= \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{(a+3b+x)p + (2a-b)q}{2(a+b)p + (x-a-3b)q}$$

L. $x = \sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$.

Setzt man hierin für die willkürlichen Gröfsen bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

27. $\frac{3a+5b+x}{a-5b+x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{3a+b+x}{a-b+x}$ [s. 32_2]

28. $\frac{5a+7b+x}{5a-b+x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{x-4b}{x-2b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$.

e. Wir wollen jetzt die oben in (5) gestellte Aufgabe direkt lösen. Es sind da zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der konstante Faktor ist gegeben, 2) die Lösung ist gegeben. In jedem Falle kann die Aufgabe auf unendlich vielfache Weise gelöst werden; es giebt unendlich viele Gleichungen, welche den Anforderungen genügen. Für einen bestimmten konstanten Faktor ist jedoch nicht jede Lösung möglich, wenn die Gleichung die angegebene Form haben soll; und umgekehrt ist für eine bestimmte Lösung nicht jeder konstante Faktor möglich, hier wie überall vorausgesetzt, dafs die Entwickelungen reell und rational sind.

Wir wollen hier zunächst den ersten Fall betrachten:

Gleichungen von der oben stehenden Form direkt aufzustellen, wenn der konstante Faktor gegeben ist.

In Vk. ist gezeigt worden, wie man aus einer geeigneten Quotientengleichung beliebig viele Gleichungen von der in V verlangten Form ableiten konnte. Soll der konstante Faktor $\frac{a}{b}$ sein, so mufs nach Vk. die Quotientengleichung die Form

$$\frac{\alpha a + \beta b + \varepsilon x}{\nu b} = \frac{\mu a}{\alpha a + \beta b - \varepsilon x}$$

haben, d. h. es mufs links im Nenner nur b, nicht auch a und x, rechts im Zähler nur a stehen, nicht auch b und x,

d das Produkt aus dem Zähler links und dem Nenner
:hts darf kein Glied mit x enthalten, da die Gleichung rein
adratisch sein soll.

Soll der konstante Faktor daher der in (8) angegebene
n, so mufs die Quotientengleichung, welche man zunächst
bilden hat, die Form haben

$$(15) \quad \frac{\alpha a + \beta b + \varepsilon x}{\mu_1 a + \nu_1 b} = \frac{\mu a + \nu b}{\alpha a + \beta b - \varepsilon x}.$$

man $\alpha a + \beta b - \varepsilon x$ oder $\varepsilon x - (\alpha a + \beta b)$ schreibt, ist
ichgültig, da die Koefficienten α, β, ε vorläufig noch un-
timmt sind.

Aus der Gleichung (15) hat man nach dem in Vk. und
n in b. angewendeten Verfahren allgemein:

$$16) \quad \frac{(\alpha a + \beta b + \varepsilon x)m + (\mu a + \nu b)n}{(\mu_1 a + \nu_1 b)m + (\alpha a + \beta b - \varepsilon x)n}$$

$$= \frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b} \cdot \frac{(\alpha a + \beta b + \varepsilon x)p + (\mu_1 a + \nu_1 b)q}{(\mu a + \nu b)p + (\alpha a + \beta b - \varepsilon x)q}$$

$$\text{L. } x = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{(\alpha a + \beta b)^2 - (\mu a + \nu b)(\mu_1 a + \nu_1 b}. \text{ *)}$$

Damit ist die oben in d. gestellte Aufgabe ganz
gemein gelöst. Die Gröfsen m, n, p und q sind will-
lich. Es giebt für jeden konstanten Faktor und jede für
selben mögliche Lösung eine unendliche Anzahl von Glei-
ngen, welche die hier verlangte Form haben.

Wir wollen das Verfahren an einigen Beispielen durch-
ren. Es möge als konstanter Faktor

$$1) \quad \frac{a+b}{a-b}$$

eben sein. Dann mufs nach (15) die Quotientengleichung
se Form haben:

$$(17) \quad \frac{\alpha a + \beta b + x}{a - b} = \frac{\mu(a+b)}{\alpha a + \beta b - x}.$$

*) Die Lösung ergiebt sich aus (15). Wollte man sie aus (16)
vickeln, so thäte man am besten, für die zusammengesetzten Gröfsen
$+ \beta b + \varepsilon x$, $\mu a + \nu b$ u. s. w. einfache Buchstaben A, B u. s. w.
etzen. Dann reducirt sich die Gleichung (16) auf $AD - BC = 0$,
. auf (15).

Es mufs links unten $a - b$, rechts oben $a + b$ stehen, wie es in (12) und (14) der Fall ist. Es konnte der Allgemeinheit unbeschadet $\varepsilon = 1$ gesetzt und der Faktor bei $a - b$ fortgelassen werden. Hätte man εx statt x, und $\nu(a - b)$ statt $a - b$, so hätte man nur x_1 statt εx, und μ statt $\mu\nu$ zu setzen; dann wäre die Lösung nicht geändert und die Gleichung hätte die Form (17).

Aus (17) hat man

$$(18) \quad x = \sqrt{(\alpha a + \beta b)^2 - \mu(a^2 - b^2)}.$$

Die Gröfsen α, β und μ stehen zur Verfügung, um der Lösung die Form zu geben, die für den angenommenen konstanten Faktor in 1) möglich ist. Hier ist jedoch zu bemerken, dafs μ nie $= 0$ sein kann, weil sonst die Quotientengleichung (17) aufhört.

Aus (18) ersehen wir, dafs die Zahl der Lösungen, welche für den konstanten Faktor in 1) möglich sind, unendlich ist. Wir ersehen ferner, dafs für den gegebenen konstanten Faktor in 1) nicht jede Lösung von der Form

$$x = \sqrt{ha^2 + 2lab + kb^2}$$

möglich ist. So wird man in (18) α, β und μ rational nicht so bestimmen können, dafs man erhält

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \sqrt{a^2 \pm ab + b^2} \text{ u. s. w.}$$

Die Form der Lösung ist daher durch den konstanten Faktor bedingt.

Für die in (18) vorkommenden willkürlichen Gröfsen α, β und μ haben wir, wenn x in möglichst einfacher Form erscheinen soll, bezw. zu setzen:

1) 0, 1, $-$ 1. Das giebt $x = \pm a$

2) 0, 0, $-$ 1. „ „ $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

3) 2, 0, $+$ 2. „ „ $x = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

4) 1, 1, $-$ 1. „ „ $x = \sqrt{2a(a + b)}$

5) 3, 1, $+$ 4. „ „ $x = \sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$ u. s. w.

Der 1. und 5. Fall sind oben in d. schon behandelt.

Für den 2. Fall haben wir infolge der Bestimmung von β und μ aus (17)

$$\frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{x}.$$

her die allgemeine Gleichung

$$\frac{mx + (a+b)n}{(a-b)m + nx} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{px + (a-b)q}{(a+b)p + qx}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, erhält man:

$$\frac{a+b+x}{a-b+x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-b+x}{a+b+x}$$

$$\frac{x+2a+2b}{x+2a-2b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{2x+a-b}{2x+a+b} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Für den 3. Fall wird die Quotientengleichung

$$\frac{2a+x}{a-b} = \frac{2(a+b)}{2a-x}.$$

ner die allgemeine Gleichung

$$\frac{(2a+x)m + 2(a+b)n}{(a-b)m + (2a-x)n} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{(2a+x)p + 2(a-b)q}{(a+b)p + (2a-x)q}$$

L. $x = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, −1, 1, −1, erhält man:

$$\frac{x+4a+2b}{x+4a-2b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{3a-b-x}{3a+b-x}$$

$$\frac{x-2b}{x+2b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{x-a-b}{x-a+b}$$

L. $x = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

Für den 4. Fall hat man

$$\frac{x+a+b}{a-b} = \frac{a+b}{x-a-b}, \text{ also}$$

$$\frac{(x+a+b)m + (a+b)n}{(a-b)m + (x-a-b)n} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{(x+a+b)p + (a-b)q}{(a+b)p + (x-a-b)q}$$

L. $x = \sqrt{2a(a+b)}$.

$$\text{VI e.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 2, 1, 2, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

$$\textbf{36.}\quad \frac{2x+3a+3b}{2x+3a+b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{x+a-3b}{x+a+b}$$

$$\textbf{37.}\quad \frac{x+3a+3b}{x+3a-b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{2x-a-3b}{2x-a-b}\quad \text{u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{2a(a+b)}$.

Es möge als konstanter Faktor

$$2)\quad \frac{2a+b}{2b+a}$$

gegeben sein. Dann hat man nach dem Obigen die Quotientengleichung

$$(19)\quad \frac{\alpha a+\beta b+x}{2b+a} = \frac{\mu(2a+b)}{\alpha a+\beta b-x}$$

zu bilden und erhält

$$(20)\quad x = \sqrt{(\alpha a+\beta b)^2 - \mu(2a+b)(2b+a)}.$$

Die Formel (20) giebt alle Lösungen, welche für den konstanten Faktor in 2) möglich sind.

Damit die Lösung möglichst einfach wird, hat man für die in (19) und (20) vorkommenden willkürlichen Größen α, β und μ bezw. folgende Werte zu setzen:

1) 5, 4, 8. Dann wird $x = \pm 3a$
2) 3, 3, 4. „ „ $x = \pm(a-b)$
3) 0, 0, —1. „ „ $x = \sqrt{(2a+b)(a+2b)}$
4) 1, 1, —1. „ „ $x = \sqrt{3a^2+7ab+3b^2}$
5) 2, 2, 1. „ „ $x = \sqrt{2a^2+3ab+2b^2}$ u. s. w.

Für den 1. Fall geht, wenn man zugleich $3x$ statt x setzt, (19) über in

$$\frac{5a+4b+3x}{2(2b+a)} = \frac{4(2a+b)}{5a+4b+3x}.$$

Ob man die 8 in Faktoren zerlegt und wie man sie zerlegt, ist für die allgemeine Gleichung gleichgültig. Man erhält

38. $$\frac{(5a+4b+3x)m+4(2a+b)n}{2(2b+a)m+(5a+4b-3x)n}$$
$$= \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{(5a+4b+3x)p+4(2b+a)q}{2(2a+b)p+(5a+4b-3x)q}$$

L. $x = \pm a$.

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, — 1, 1, — 1; 3) — 1, 2, — 1, 2, so erhält man:

39. $$\frac{13a+8b+3x}{7a+8b-3x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{3a+4b+x}{3a+2b-x}$$

40. $$\frac{x-a}{x-a} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{3x+a-4b}{3x-a-2b}$$

41. $$\frac{11a+4b-3x}{4a+2b-3x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{a+4b-x}{a+b-x}$$ u. s. w.

L. $x = \pm a$.

Für den 2. Fall geht (19) über in
$$\frac{3a+3b+x}{2(2b+a)} = \frac{2(2a+b)}{3a+3b-x}.$$

Daher die allgemeine Gleichung

42. $$\frac{(3a+3b+x)m+2(2a+b)n}{2(2b+a)m+(3a+3b-x)n}$$
$$= \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{(3a+3b+x)p+2(2b+a)q}{2(2a+b)p+(3x+3b-x)q}$$

L. $x = \pm(a-b)$.

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1 2) 2, — 1, 2, — 1, so erhält man:

43. $$\frac{7a+5b+x}{7b+5a+x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{5a+7b-x}{5b+7a-x}$$

44. $$\frac{a+2b+x}{b+2a+x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{a+5b+x}{b+5a+x}$$ u. s. w.

L. $x = \pm(a-b)$.

Für den 3. Fall hat man
$$\frac{x}{2b+a} = \frac{2a+b}{x}, \text{ also}$$

45. $$\frac{mx+(2a+b)n}{(2b+a)m+nx} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{px+(2b+a)q}{(2a+b)p+qx}$$

L. $x = \sqrt{(2a+b)(2b+a)}$.

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, [illegible] 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

46. $$\frac{x+2a+b}{x+2b+a} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{x+a+2b}{x+b+2a}$$

47. $$\frac{x+4a+2b}{x+4b+2a} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{a+2b+2x}{b+2a+2x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{(2a+b)(2b+a)}$.

In derselben Weise kann man für den 4. und 5. F[illegible] beliebig viele Gleichungen von der verlangten Form a[illegible]stellen.

Es möge endlich als konstanter Faktor noch

$$3)\ \frac{3a+b}{3b+a}$$

gegeben sein. Dann hat man zunächst

$$\frac{\alpha a + \beta b + x}{3b+a} = \frac{\mu(3a+b)}{\alpha a + \beta b - x}$$

$$x = \sqrt{(\alpha a + \beta b)^2 - \mu(3a+b)(3b+a)}.$$

Die einfachsten Fälle, den Fall $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\mu =$ [illegible] 1 nicht gerechnet, sind hier:

1) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\mu = -1$; also $x = 2\sqrt{a^2 + 3ab + [illegible] b^2}$;

2) $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\mu = 1$; also $x = \pm (a-b)$.

Für den 1. Fall hat man, wenn man zugleich $2x$ stat[illegible]t x setzt,

$$\frac{2x+a+b}{3b+a} = \frac{3a+b}{2x-a-b}$$

und daher allgemein

48. $$\frac{(2x+a+b)m + (3a+b)n}{(3b+a)m + (2x-a-b)n}$$
$$= \frac{3a+b}{3b+a} \cdot \frac{(2x+a+b)p + (3b + [illegible])q}{(3a+b)p + (2x-a-[illegible])q}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$.

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, [illegible] 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

49. $\frac{x + 2a + b}{x + 2b + a} = \frac{3a + b}{3b + a} \cdot \frac{x + b}{x + a}$

50. $\frac{2x + 7a + 3b}{2x + 7b + 3a} = \frac{3a + b}{3b + a} \cdot \frac{4x - a + b}{4x + a - b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$.

Für den 2. Fall hat man

$$\frac{2a + 2b + x}{3b + a} = \frac{3a + b}{2a + 2b - x}.$$

Daher allgemein

51. $\frac{(2a + 2b + x)m + (3a + b)n}{(3b + a)m + (2a + 2b - x)n}$

$$= \frac{3a + b}{3b + a} \cdot \frac{(2a + 2b + x)p + (3b + a)q}{(3a + b)p + (2a + 2b - x)q}$$

L. $x = \pm (a - b)$.

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

52. $\frac{5a + 3b + x}{5b + 3a - x} = \frac{3a + b}{3b + a} \cdot \frac{3a + 5b + x}{3b + 5a - x}$

53. $\frac{x + 8a + 4b}{x + 8b + 4a} = \frac{3a + b}{3b + a} \cdot \frac{5a + 7b - 2x}{5b + 7a - 2x}$ u. s. w.

L. $x = \pm (a - b)$.

Damit ist allgemein und mehrfach speciell gezeigt, wie man für einen gegebenen konstanten Faktor, der die in (8) angegebene Form hat, alle Lösungen auffindet, welche für den Faktor möglich sind, und wie man für jede mögliche Lösung beliebig viele quadratische Gleichungen von der hier verlangten Form aufstellt, welche den gegebenen konstanten Faktor haben und die nach demselben vorher bestimmte Lösung liefern. Bei diesen Entwickelungen sind wir von dem konstanten Faktor ausgegangen.

f. Wir wollen jetzt die oben in (5) gestellte Aufgabe für den vorn in e. angedeuteten zweiten Fall lösen:

Gleichungen von der oben stehenden Form direkt aufzustellen, wenn die Lösung derselben im voraus gegeben ist.

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Dieser Fall ist bei weitem der **interessanteste**. Er giebt zugleich den Weg an, auf welchem die meisten der oben vorgeführten Aufgaben gefunden sind. Die Behandlung dieses Falles giebt auch Aufschlufs über die Frage:

> Welche konstante Faktoren können in einer quadratischen Gleichung von der hier behandelten Form vorkommen, wenn die Lösung derselben im voraus gegeben ist?

Bevor wir an die Lösung der Aufgabe selbst gehen, ist es nötig, einige Bemerkungen vorauszuschicken.

Von allen bisher behandelten Gleichungen müssen die Gleichungen [18—28], welche dem 4. Abschnitt zu Grunde gelegt sind, als die ursprünglicheren angesehen werden. Aus diesen lassen sich alle übrigen ableiten. Von den in I., II. und III. behandelten ist das oben nachgewiesen. Es ist daher noch die Frage zu beantworten:

> In welcher Beziehung stehen die in IV behandelten Quotientengleichungen zu den Gleichungen von der hier behandelten Form?

Transformirt man die Gleichung

$$(21)\quad \frac{x+5a+b}{x-3a+b} = \frac{x-a+b}{a-x+3b}\ [20],\ \text{L. } x = \sqrt{a^2+10ab+b^2}$$

nach dem KS. in eine andere Quotientengleichung, in welcher links im Nenner und rechts im Zähler kein x vorkommt, so findet man

$$(22)\quad \frac{x+2a+b}{2b-a} = \frac{3a}{x-2a-b}.$$

Man hat nur zu addiren und zu subtrahiren. Aus dieser Quotientengleichung kann man nach dem oft angewendeten Verfahren beliebig viele Gleichungen von der verlangten Form bilden, welche den konstanten Faktor $\frac{3a}{2b-a}$ haben. Man erhält z. B., wie 30, 46 u. a. aus der zugehörigen Quotientengleichung gebildet sind, aus (22) als einfachsten Fall

54. $\frac{x+5a+b}{x-3a+b} = \frac{3a}{2b-a} \cdot \frac{x+a+3b}{x+a-b}$

L. $x = \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Transformirt man nun (21) nach dem KS. ganz beliebig, bildet also

$$(23) \quad \frac{(x+5a+b)m+(x-a+b)n}{(x-3a+b)m+(a-x+3b)n} = \frac{(x-3a+b)p+(x-a+b)q}{(x-3a+b)p+(a-x+3b)q}$$

und sucht aus dieser Quotientengleichung eine dritte, indem man nach dem KS. erstens das x aus dem Nenner, zweitens aus dem Zähler fortschafft, so kommt man wieder auf die Gleichung (22). Man hätte zu dem Zwecke erstens den ersten Quotienten in (23) mit $p - q$, den zweiten mit $m - n$; zweitens den ersten mit $p + q$, den zweiten mit $m + n$ zu erweitern und jedesmal den KS. mit Subtraktion anzuwenden. Der Faktor $mq - np$ hebt sich fort und mit ihm alle willkürlichen Konstanten. Die Gleichung (23) liefert immer nur einen konstanten Faktor, welcher in 54 angegeben ist.

Wir schliefsen daraus: Wie man auch eine Quotientengleichung von der in IV. behandelten Form nach dem KS. transformiren mag, man kommt, wenn man Gleichungen von der hier behandelten Form bilden will, immer nur auf Gleichungen mit demselben konstanten Faktor, oder, wie wir kurz sagen können:

Für eine Quotientengleichung hat die Anwendung des KS. keinen Einflufs auf den konstanten Faktor.

Hat man z. B. die einfache Quotientengleichung

$$(24) \quad \frac{x}{b} = \frac{a}{x},$$

so führt dieselbe auf Gleichungen mit dem konstanten Faktor $\frac{a}{b}$, z. B.

$$\frac{x+2a}{2x+b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+2b}{2x+a}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{ab}.$$

Wendet man auf (24) den KS. an, so kann man beliebig bilden

$$(25) \quad \frac{x+3a}{b+3x} = \frac{2x+a}{2b+x}.$$

$$\text{VIf.} \quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Eliminirt man hier nach dem KS. **erstens** x **im** Nenner, zweitens im Zähler, so kommt man wieder auf die Gleichung (24), d. h. auf Gleichungen mit demselben konstanten Faktor $\frac{a}{b}$.

Transformirt man jedoch eine Quotientengleichung, wie sie in IV. behandelt sind, durch korr. Addition, so kommt man auch jedesmal auf einen neuen konstanten Faktor, oder kurz:

> Bei einer Quotientengleichung verändert die Anwendung der korr. Add. stets auch den konstanten Faktor.

Aus der Gleichung (24) hat man durch korr. Additio

$$\frac{x}{x+b} = \frac{a}{a+x}.$$

Hieraus durch Elimination von x aus dem Nenner na dem KS.

$$\frac{a-x}{a-b} = \frac{a}{a+x}, \text{ mithin}$$

$$\frac{2a-x}{2a-b+x} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{2a-b-x}{2a+x} \text{ u. s. w.}$$

Man kommt auf den konstanten Faktor $\frac{a}{a-b}$.

Bildet man aus (24) durch korr. Addition

$$\frac{x+2b}{2x+b} = \frac{a+2x}{2a+x},$$

schafft hier durch Anwendung des KS. erstens das x aus dem Nenner, zweitens aus dem Zähler fort, so erhält man

$$\frac{3x+2a-2b}{4a-b} = \frac{4b-a}{3x-2a+2b}, \text{ mithin}$$

$$\frac{3x+a+2b}{3x+b+2a} = \frac{4b-a}{4a-b} \cdot \frac{x+2a-b}{x+2b-a} \text{ u. s. w.}$$

Man kommt auf den konstanten Faktor $\frac{4b-a}{4a-b}$.

Damit ist der zweite Satz in zwei Fällen als richtig erwiesen. Wir können aus (24) auch durch korr. Add. ganz allgemein bilden

$$(26) \quad \frac{mx+bn}{px+bq} = \frac{am+nx}{ap+qx}$$

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

und suchen für diese Quotientengleichung den konstanten Faktor, indem wir x erstens im Nenner, zweitens im Zähler eliminiren. Dann giebt der zweite Zähler, dividirt durch den ersten Nenner, den konstanten Faktor. Dieser enthält m, n, p und q, mufs sich also auch ändern, sobald diese Gröfsen sich ändern, d. h. sobald durch korr. Add. aus (24) eine neue Gleichung gebildet wird.

Wir müssen aus dem Obigen schliefsen:

Bildet man aus einer vorgelegten Quotientengleichung

$$(27)\quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

durch korr. Add. allgemein

$$(28)\quad \frac{Am + nB}{Ap + Bq} = \frac{Cm + Dn}{Cp + Dq},$$

wo m, n, p und q willkürliche Gröfsen sind, so mufs man auf alle konstanten Faktoren kommen, welche für die Gleichung (27) möglich sind.

Man hat in (28) durch Anwendung des KS. erstens das x aus dem Nenner, zweitens aus dem Zähler fortzuschaffen. Dividirt man dann den von x befreiten Zähler durch den von x befreiten Nenner, so erhält man den allgemeinen Ausdruck für alle konstanten Faktoren, welche für die der Gleichung (27) zum Grunde liegende Lösung möglich sind.

Nach diesen Vorbemerkungen und Andeutungen wollen wir das Verfahren an einigen Beispielen durchführen. Die Lösung ist gegeben. Die aus dieser hervorgehende oder leicht zu bildende specielle Quotientengleichung ist durch korr. Addition in eine allgemeine Quotientengleichung zu verwandeln und dann zu untersuchen, welche konstante Faktoren für die Lösung möglich sind.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x = \sqrt{ab}$$

gegeben. Aus dieser Gleichung folgt nach Vk. als einfachste Quotientengleichung

$$\frac{x}{\cdot} = \frac{a}{\cdot}$$

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

und hieraus durch korr. Add., wie schon in (26) angegeben ist,

$$(29)\qquad \frac{xm+bn}{xp+bq} = \frac{am+xn}{ap+xq}.$$

Hierin ist erstens der erste Quotient mit $-q$, der zweite mit p, zweitens der erste mit $-n$, der zweite mit m zu erweitern und jedesmal der KS. mit Addition anzuwenden. Dann erhält man

$$(30)\qquad \frac{amp-bnq+(np-mq)x}{ap^2-bq^2} = \frac{am^2-bn^2}{amp-bnq+(mq-np)x}.$$

Jede aus dieser Gleichung abgeleitete Gleichung, welche von der hier behandelten Form sein soll, mufs den konstanten Faktor

$$(31)\qquad \frac{am^2-bn^2}{ap^2-bq^2}$$

haben, oder alle konstanten Faktoren, welche für die Lösung 1) möglich sind, müssen in dem Quotienten (31) enthalten sein. Solche Faktoren sind:

$$1.\ \frac{a}{b},\quad 2.\ \frac{4a-b}{4b-a},\quad 3.\ \frac{9a-b}{9b-a},\quad 4.\ \frac{9a-4b}{9b-4a}\quad \text{u. s. w.}$$

Für den 1. Fall kommt man auf die bei 7) in Vk. entwickelten Gleichungen.

Für den 2. Fall ist $m=2$, $n=1$, $p=1$, $q=2$. Dann geht (30) über in

$$(32)\qquad \frac{3x-2a+2b}{4b-a} = \frac{4a-b}{3x+2a-2b}.$$

Man hätte die Substitution auch in (29) machen und aus der so erhaltenen Quotientengleichung nach dem KS. die Gleichung (32) entwickeln können. Oder man hätte auch nach e. oben verfahren können, um (32) aufzustellen, da man jetzt den konstanten Faktor und die Lösung kennt. Man hätte nach (15) setzen müssen

$$\frac{\alpha a+\beta b+\varepsilon x}{4b-a} = \frac{\mu(4a-b)}{\alpha a+\beta b-\varepsilon x}.$$

Da $x^2 = ab$ ist, so wird die Gleichung erfüllt durch:

$$\mu = -1,\quad \alpha = 2,\quad \beta = 2,\quad \varepsilon = 5,\ \text{oder}$$
$$\mu = -1,\quad \alpha = 2,\quad \beta = -2,\quad \varepsilon = 3.$$

Die letzte Annahme giebt die Gleichung (32). — Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Fälle, wie in ähnlicher Weise auch für die folgenden Aufgaben.

Aus (32) hat man die allgemeine Gleichung

55. $$\frac{(3x - 2a + 2b)m + (4a - b)n}{(4b - a)m + (3x + 2a - 2b)n} = \frac{4a - b}{4b - a} \cdot \frac{(3x - 2a + 2b)p + (4b - a)q}{(4a - b)p + (3x + 2a - 2b)q} \text{ *)}$$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Setzt man hierin für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, — 1, 1, — 1; 3) 1, 2, — 1, 2, so erhält man:

56. $$\frac{3x + 2a + b}{3x + 2b + a} = \frac{4a - b}{4b - a} \cdot \frac{x - a + 2b}{x - b + 2a}$$

57. $$\frac{x - 2a + b}{x - 2b + a} = \frac{4a - b}{4b - a} \cdot \frac{a + 2b - 3x}{b + 2a - 3x}$$

58. $$\frac{x + 2a}{a + 2x} = \frac{4a - b}{4b - a} \cdot \frac{2b - x}{2x - b} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Die letzte Gleichung ist identisch mit 32_3.

Für den 3. Fall ist $m = 3$, $n = 1$, $p = 1$, $q = 3$. Dann geht (30) über in

$$\frac{8x - 3a + 3b}{9b - a} = \frac{9a - b}{8x + 3a - 3b} \text{ u. s. w.}$$

Für den 4. Fall ist $m = 3$, $n = 2$, $p = 2$, $q = 3$. Dann geht (30) über in

$$\frac{5x - 6a + 6b}{9b - 4a} = \frac{9a - 4b}{5x + 6a - 6b}.$$

Man hat also allgemein

59. $$\frac{(5x - 6a + 6b)m + (9a - 4b)n}{(9b - 4a)m + (5x + 6a - 6b)n} = \frac{9a - 4b}{9b - 4a} \cdot \frac{(5x - 6a + 6b)p + (9b - 4a)q}{(9a - 4b)p + (5x + 6a - 6b)q}$$

L. $x = \sqrt{ab}$.

*) Die hier gebrauchten willkürlichen Gröfsen m, n, p, q sind nicht identisch mit den in (29) und (30) vorkommenden. Die Gröfsen sind in beiden Fällen willkürlich, aber durchaus unabhängig von einander. Ähnliches gilt auch für die folgenden Betrachtungen.

Setzt man hierin für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, -2, so erhält man:

60. $\frac{5x + 3a + 2b}{5x + 3b + 2a} = \frac{9a - 4b}{9b - 4a} \cdot \frac{x - 2a + 3b}{x - 2b + 3a}$

61. $\frac{5x + 12a - 2b}{5x - 12b + 2a} = \frac{9a - 4b}{9b - 4a} \cdot \frac{8a - 3b + 10x}{8b - 3a - 10x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{ab}$.

Es sei als Lösung

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Wir bilden aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung die einfachste Quotientengleichung

$$\frac{x+b}{a} = \frac{b}{x-b}.$$

Hieraus durch korr. Addition allgemein

$$\frac{(x+b)m + an}{(x+b)p + aq} = \frac{am + (x-b)n}{ap + (x-b)q}.$$

Schafft man hier ähnlich, wie es oben bei (29) geschehen ist, durch Anwendung des KS. das x erstens aus dem Nenner, zweitens aus dem Zähler fort, so erhält man

$$(33) \quad \frac{a(mp - nq) - b(np + mq) + (np - mq)x}{a(p^2 - q^2) - 2bpq}$$
$$= \frac{a(m^2 - n^2) - 2bmn}{a(mp - nq) - b(np + mq) + (mq - np)x}.$$

Es müssen daher alle konstanten Faktoren, welche für die gegebene Lösung möglich sind, in dem Quotienten

$$(34) \quad \frac{a(m^2 - n^2) - 2bmn}{a(p^2 - q^2) - 2bpq}$$

enthalten sein.

Setzt man $m = 1$, $n = 0$, $p = 1$, $q = -1$, so kommt man auf den konstanten Faktor $\frac{a}{b}$. Für diesen Fall sind schon oben in V. eine Menge Gleichungen aufgestellt: 2—5, 34—36 u. s. w.

Setzt man weiter für m, n, p und q bezw. 1) 3, 1, 4, 2;

2) 3, — 1, 4, — 2; 3) 3, — 1, 3, 1; 4) 5, — 1, 3, — 2, so kommt man nach (34) auf die konstanten Faktoren:

1. $\frac{4a-3b}{4b-3a}$ 2. $\frac{4a+3b}{4b+3a}$ 3. $\frac{4a+3b}{4a-3b}$ 4. $\frac{12a+5b}{12b+5a}$ u.s.w.

Für den 1. Fall geht (33) über in

$$\frac{x-5a+5b}{2(4b-3a)} = \frac{4a-3b}{x+5a-5b}.$$

Man hat daher allgemein

62. $$\frac{(x-5a+5b)m+(4a-3b)n}{2(4b-3a)m+(x+5a-5b)n} = \frac{4a-3b}{4b-3a} \cdot \frac{(x-5a+5b)p+(4b-3a)q}{2(4a-3b)p+(x+5a-5b)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Setzt man hierin für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, — 1; 2) 1, — 1, 1, 1; 3) 1, 2, 1, — 2, so erhält man:

63. $$\frac{x-a+2b}{x+b-2a} = \frac{4a-3b}{4b-3a} \cdot \frac{3b-a+x}{3a-b-x}$$

64. $$\frac{x-9a+8b}{x-8a+9b} = \frac{4a-3b}{4b-3a} \cdot \frac{13b-11a-x}{13a-11b+x}$$

65. $$\frac{x+3a-b}{x-3b+a} = \frac{4a-3b}{4b-3a} \cdot \frac{2a-b+x}{2b-a-x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Für den 3. Fall geht (33) über in

Man hat also $$\frac{5a-3x}{4a-3b} = \frac{4a+3b}{5a+3x}.$$

66. $$\frac{(5a-3x)m+(4a+3b)n}{(4a-3b)m+(5a+3x)n} = \frac{4a+3b}{4a-3b} \cdot \frac{(5a-3x)p+(4a-3b)q}{(4a+3b)p+(5a+3x)q}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, — 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

67. $$\frac{3a+b-x}{3a-b+x} = \frac{4a+3b}{4a-3b} \cdot \frac{3(x-b)-a}{3(x-b)+a}$$

68. $$\frac{13a+6b-3x}{13a-6b-3x} = \frac{4a+3b}{4a-3b} \cdot \frac{14a-3b+6x}{14a+3b+6x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Die Gleichung 67 ist die unter [32_6] aufgeführte.

Für den 4. Fall erhält man zunächst

$$\frac{13a + 13b + 7x}{12b + 5a} = \frac{2(12a + 5b)}{13a + 13b - 7x}.$$

Bildet man hieraus die allgemeine Gleichung von der er- langten Form und setzt in derselben für die willkürlic e Faktoren m, n, p, q bezw. 1) 1, — 1, 1, — 1; 2) 1, 1, 1 3) — 1, 2, — 1, 2, so erhält man:

$$69.\quad \frac{7x - 11a + 3b}{7x - 11b + 3a} = \frac{12a + 5b}{12b + 5a} \cdot \frac{8a + b - 7x}{8b + a - 7x}$$

$$70.\quad \frac{37a + 23b + 7x}{37b + 23a + 7x} = \frac{12a + 5b}{12b + 5a} \cdot \frac{18a + 25b - 7x}{18b + 25a - 7x}$$

$$71.\quad \frac{5a + b - x}{5b + a - x} = \frac{12a + 5b}{12b + 5a} \cdot \frac{3a + 2b - 2x}{3b + 2a - 2x}\quad \text{u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Es sei als Lösung

$$3)\quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Man hat als einfachste Quotientengleichung zunächst

$$\frac{a+x}{b} = \frac{b}{a-x}$$

und hieraus allgemein

$$\frac{(a+x)m + bn}{(a+x)p + bq} = \frac{bm + (a-x)n}{bp + (a-x)q}.$$

Man findet nach dem KS.

$$(35)\quad \frac{(np + mq)a + (mp + nq)b - (np - mq)x}{2pqa + (p^2 + q^2)b}$$
$$= \frac{2mna + (m^2 + n^2)b}{(np + mq)a + (mp + nq)b + (np - mq)x}.$$

Alle konstanten Faktoren, welche für die angegebene Lösung möglich sind, müssen daher enthalten sein in

$$(36)\quad \frac{2mna + (m^2 + n^2)b}{2pqa + (p^2 + q^2)b}.$$

Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, — 1; 2) 3, 1, 3, — 1; 3) 2, 1, 2, — 1, so kommt man von (36) auf die konstanten Faktoren:

$$1.\ \frac{a+b}{a-b}\qquad 2.\ \frac{3a+5b}{3a-5b}\qquad 3.\ \frac{4a+5b}{4a-5b}\quad \text{u. s. w.}$$

Für den 1. Faktor sind schon oben in 19—37 Gleichungen in Menge aufgestellt.

Für den 2. und 3. Faktor erhält man bezw. aus (35) zunächst:

$$(37) \quad \frac{3x - 4b}{3a - 5b} = \frac{3a + 5b}{3x + 4b}$$

$$(38) \quad \frac{4x - 3b}{4a - 5b} = \frac{4a + 5b}{4x + 5b}.$$

Hieraus als einfachste Fälle, wenn man für die einzuführenden willkürlichen Faktoren m, n, p, q bei (37) 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, — 1, bei (38) 1) 1, 1, 1, 1; 2) 3, 1, 3, — 1 setzt:

72. $\frac{3x + 3a + b}{3x + 3a - b} = \frac{3a + 5b}{3a - 5b} \cdot \frac{x + a - 3b}{x + a + 3b}$

73. $\frac{x + 2a + 2b}{x - 2a + 2b} = \frac{3a + 5b}{3a - 5b} \cdot \frac{x + b + 2x}{a - b - 2x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

74. $\frac{2x + 2a + b}{2x + 2a - b} = \frac{4a + 5b}{4a - 5b} \cdot \frac{x + a - 2b}{x + a + 2b}$

75. $\frac{3a + a - b}{3a - a - b} = \frac{4a + 5b}{4a - 5b} \cdot \frac{3u - 3b + x}{3a + 3b - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Die Gleichung 32_5 ist aus (37) abgeleitet. Man hat für die einzuführenden willkürlichen Faktoren bezw. — 1, 1, 1, 1 zu setzen.

Soll die Lösung

$$4) \quad x = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

sein, so hat man zunächst

$$x^2 = (a + b)^2 - ab$$

$$(39) \quad \frac{a + b + x}{b} = \frac{a}{a + b - x}.$$

Man findet, dafs für diese Lösung alle konstanten Faktoren enthalten sein müssen in

$$(40) \quad \frac{m(m + 2n)a + n(2m + n)b}{p(p + 2q)a + q(2p + q)b}.$$

Statt der Gleichung (39) hätte man aus 4) auch bilden können

$$x^2 = (a - b)^2 + 3ab$$

$$(41) \quad \frac{x + a - b}{3b} = \frac{a}{x - a + b}.$$

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B}=\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{C}{D}.$$

Dann kommt man auf den allgemeinen Faktor

$$(42)\qquad \frac{m(m-2n)a+n(2m-3n)b}{p(p-2q)a+q(2p-3q)b}.$$

Dieser Quotient schliefst keine anderen Gröfsen in sich, als der in (40) angegebene. Setzt man in (42) $m+2n$ statt m, $p+2q$ statt p, so geht (42) in (40) über. Ob wir also aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung die Quotientengleichung (39) oder (41) bildeten, machte für die Auffindung der für die Lösung möglichen konstanten Faktoren keinen Unterschied. Ähnliches gilt für die Bildung der Quotientengleichungen aus den gegebenen Lösungen im Folgenden. Aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung lassen sich stets zwei verschiedene Quotientengleichungen ableiten; beide führen jedoch auf dieselben konstanten Faktoren.

Setzt man in (40) für m, n, p und q bezw. 1, 0, 0, 1, so kommt man auf den konstanten Faktor $\frac{a}{b}$, für welchen schon oben in V. eine genügende Anzahl von Beispielen gegeben ist. Setzt man weiter 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) -1, 3, 3, -1; 4) 4, 1, 1, 4; 5) -1, 4, 4, -1, so kommt man auf die konstanten Faktoren:

$$1.\ \frac{8a+5b}{8b+5a}\qquad 2.\ \frac{15a+7b}{15b+7a}\qquad 3.\ \frac{5a-3b}{5b-3a}.$$

$$4.\ \frac{8a+3b}{8b+3a}\qquad 5.\ \frac{7a-8b}{8a-7b}\ \text{u. s. w.}$$

Man hat dann zunächst die betreffenden Quotientengleichungen zu bilden:

$$(43)\quad \begin{aligned}
&1.\ \frac{7a+7b+3x}{8b+5a}=\frac{8a+5b}{7a+7b-3x}\\
&2.\ \frac{13a+13b+8x}{15b+7a}=\frac{15a+7b}{13a+13b-8x}\\
&3.\ \frac{7a+7b-8x}{5b-3a}=\frac{5a-3b}{7a+7b+8x}\\
&4.\ \frac{7a+7b+5x}{8b+3a}=\frac{8a+3b}{7a+7b-5x}\\
&5.\ \frac{15x-13a-13b}{8a-7b}=\frac{7a-8b}{15x+13a+13b}.
\end{aligned}$$

Aus jeder dieser Quotientengleichungen kann man für den betreffenden konstanten Faktor beliebig viele Gleichungen von der verlangten Form ableiten, indem man die allgemeine Gleichung bildet, wie es oben bei 1) und 2) geschehen ist, und in der allgemeinen Gleichung für die willkürlichen Gröfsen specielle Werte setzt.

Als einfachste Fälle erhält man aus den angegebenen Quotientengleichungen folgende Gleichungen von der verlangten Form:

76. $\frac{5a+4b+x}{5b+4a-x} = \frac{8a+5b}{8b+5a} \cdot \frac{3x+2a-b}{3x-2b+a}$

77. $\frac{4x-a+3b}{4x+b-3a} = \frac{15a+7b}{15b+7a} \cdot \frac{5a+7b+2x}{5b+7a-2x}$

78. $\frac{3a+b-2x}{3b+a+2x} = \frac{5a-3b}{3a-5b} \cdot \frac{5a+b-4x}{5b+a+4x}$

79. $\frac{5x-a+4b}{5x+b-4a} = \frac{8a+3b}{8b+3a} \cdot \frac{2a+3b+x}{2b+3a-x}$

80. $\frac{2a+7b-5x}{2b+7a+5x} = \frac{7a-8b}{8a-7b} \cdot \frac{a+4b-3x}{b+4a+3x}$

L. $x = \sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Diese Gleichungen sind nicht durch Aufstellung der allgemeinen Gleichung, sondern direkt aus den vorher gebildeten Quotientengleichungen abgeleitet, immer nur durch Addition oder Subtraktion nach dem KS. So hat man aus 1. in (43)

$$\frac{(7a+7b+3x)+(8a+5b)}{(8b+5a)+(7a+7b-3x)} = \frac{5a+4b+x}{5b+4a-x}$$

und nach Vorziehung des konstanten Faktors $\frac{8a+5b}{8b+5a}$ durch Subtraktion:

$$\frac{(7a+7b+3x)-(8b+5a)}{(8a+5b)-(7a+7b-3x)} = \frac{3x+2a-b}{3x-2b+a}.$$

Ähnlich aus 2. in (43)

$$\frac{(13a+13b+8x)-(15a+7b)}{(15b+7a)-(13a+13b-8x)} = \frac{4x-a+3b}{4x+b-3a} \text{ u. s. w.}$$

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D} \cdot$$

Soll die Lösung

$$5)\quad x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$$

sein, so hat man zunächst

$$x^2 = (a-b)^2 + 16ab$$

$$\frac{x+a-b}{4b} = \frac{4a}{x-a+b} \cdot$$

Alle hier möglichen konstanten Faktoren müssen enthalten sein in

$$(44)\quad \frac{m(2m-n)a + n(m-2n)b}{p(2p-q)a + q(p-2q)b} \cdot$$

Setzt man $m = 1$, $n = 0$, $p = 0$, $q = 1$, so kommt man auf $\frac{a}{b}$. Dieser Faktor ist in V genügend berücksichtigt. Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) $2, -1, 1, -2$; 2) $3, 2, 2, 3$; 3) $3, 1, 1, 3$, so kommt man auf

$$1.\ \frac{5a-2b}{5b-2a} \quad 2.\ \frac{6a-b}{6b-a} \quad 3.\ \frac{15a+b}{15b+a} \cdot$$

Für diese konstanten Faktoren hat man zunächst entsprechend die einfachen Quotientengleichungen:

$$(45)\quad \begin{aligned} &1.\ \frac{3x+13a-13b}{4(5b-2a)} = \frac{4(5a-2b)}{3x-13a+13b} \\ &2.\ \frac{5x+11a-11b}{4(6b-a)} = \frac{4(6a-b)}{5x-11a+11b} \\ &3.\ \frac{4x+a-b}{15b+a} = \frac{15a+b}{4x-a+b} \cdot \end{aligned}$$

Hieraus entsprechend als einfachste Fälle:

81. $\frac{x+11a-7b}{x+11b-7a} = \frac{5a-2b}{5b-2a} \cdot \frac{3x+5a+7b}{3x+5b+7a}$

82. $\frac{x+7a-3b}{x+7b-3a} = \frac{6a-b}{6b-a} \cdot \frac{5x+7a+13b}{5x+7b+13a}$

83. $\frac{x+4a}{x+4b} = \frac{15a+b}{15b+a} \cdot \frac{2x+a+7b}{2x+b+7a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

Die Gleichung 83 ist identisch mit 32_7.

Setzt man in 2. bei (45) $-a$ statt a, so giebt das

$$\frac{11a + 11b - 5x}{4(6b + a)} = \frac{4(6a + b)}{11a + 11b + 5x}.$$

Hieraus ergiebt sich als einfachster Fall die Gleichung 32_9:

$$\frac{7a + 3b - x}{7b + 3a + x} = \frac{6a + b}{6b + a} \cdot \frac{5x - 7a + 13b}{5x + 7b - 13a}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$.

Soll als Lösung

$$6)\quad x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben sein, so hat man

$$x^2 = (3a - 3b)^2 + 4ab$$

$$\frac{x + 3a - 3b}{2b} = \frac{2a}{x - 3a + 3b}.$$

Als allgemeine Formel für den konstanten Faktor erhält man hieraus

$$(46)\quad \frac{m(m - 3n)a + n(3m - n)b}{p(p - 3q)a + q(3p - q)b}.$$

Setzt man $m = 1$, $n = 0$, $p = 0$, $q = 1$, so kommt man auf $\frac{a}{b}$. Setzt man weiter für m, n, p und q bezw. 1) 1, 2, 2, 1; 2) 2, -1, 1, -2; 3) 3, -1, 1, -3, so erhält man als konstante Faktoren:

$$1.\ \frac{5a - 2b}{5b - 2a} \qquad 2.\ \frac{10a - 7b}{10b - 7a} \qquad 3.\ \frac{9a - 5b}{9b - 5a} \quad \text{u. s. w.}$$

Für diese drei konstanten Faktoren kommt man zunächst bezw. auf die Quotientengleichungen:

$$(47)\quad \begin{aligned} 1.&\ \frac{3x + 11a - 11b}{2(5b - 2a)} = \frac{2(5a - 2b)}{3x - 11a + 11b} \\ 2.&\ \frac{3x + 19a - 19b}{2(10b - 7a)} = \frac{2(10a - 7b)}{3x - 19a + 19b} \\ 3.&\ \frac{2x + 9a - 9b}{9b - 5a} = \frac{9a - 5b}{2x - 9a + 9b}. \end{aligned}$$

Hieraus als einfachste Fälle entsprechend:

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{C}{D}.$$

Es sei als Lösung

$$9)\quad x = \pm(a-b)$$

gegeben. Dann hat man:

$$x^2 = (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$

$$\frac{a+b+x}{2b} = \frac{2a}{a+b-x}.$$

Man kommt für den konstanten Faktor auf die allge Formel

$$(52)\quad \frac{m+n}{p+q}\cdot\frac{am+bn}{ap+bq}.$$

Da nun m, n, p und q ganz beliebige Zahlen sein kö so ist auch für die angegebene Lösung jeder konstante F von der Form $\frac{\mu a+\nu b}{\mu_1 a+\nu_1 b}$ möglich. Nur darf $m+n$ $p+q$ nicht $=0$ sein, also weder im Zähler noch im N $a-b$ stehen. Wir haben daher den Satz:

Ist die rationale Lösung $x = \pm(a-b)$ im aus gegeben, so kann für die Gleichunger der hier verlangten Form der konstante F $\frac{\mu a+\nu b}{\mu_1 a+\nu_1 b}$ ganz beliebig sein; nur $\nu = -\mu$ $\nu_1 = -\mu_1$ sind ausgeschlossen.

Wir können daher die konstanten Faktoren belieb nehmen, z. B.

$$1.\ \frac{2a+b}{2b+a}\quad 2.\ \frac{3a+b}{3b+a}\quad 3.\ \frac{2a+3b}{4a+5b}\quad 4.\ \frac{6a+5b}{6b+5a}.$$

Für diese konstanten Faktoren erhält man zunächs sprechend die Quotientengleichungen:

$$(53)\quad \begin{cases} 1.\ \dfrac{3a+3b+x}{2(2b+a)} = \dfrac{2(2a+b)}{3a+3b-x} \\[2ex] 2.\ \dfrac{2a+2b+x}{3b+a} = \dfrac{3a+b}{2a+2b-x} \\[2ex] 3.\ \dfrac{19a+26b+x}{9(4a+5b)} = \dfrac{5(2a+3b)}{19a+26b-x} \\[2ex] 4.\ \dfrac{11a+11b+x}{2(6b+5a)} = \dfrac{2(6a+5b)}{11a+11b-x}. \end{cases}$$

Bildet man aus jeder dieser Gleichungen die allge Gleichung und setzt für die willkürlichen Faktoren m, bezw. 1) 2, 1, 2, 1; 2) 2, 1, 2, 1; 3) 1, -1, 1, 1; 4) 2, 1, 2, -1, so erhält man entsprechend:

93. $\frac{5a+4b+x}{5b+4a+x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{7a+11b-x}{7b+11a-x}$

94. $\frac{7a+5b+2x}{7b+5a+2x} = \frac{3a+b}{3b+a} \cdot \frac{4a+8b-x}{4b+8a-x}$

95. $\frac{9a+11b+x}{17a+19b+x} = \frac{2a+3b}{4a+5b} \cdot \frac{39a+51b+x}{37a+53b-x}$

96. $\frac{5a+6b+x}{5b+6a+x} = \frac{6a+5b}{6b+5a} \cdot \frac{9a+13b+x}{9b+13a+x}$ u. s. w.

L. $x = \pm (a-b)$.

Es möge als Lösung

$$10) \quad x = \pm a$$

gegeben sein. Dann hat man zunächst

$$\frac{x+b}{a-b} = \frac{a+b}{x-b}.$$

Man erhält für den konstanten Faktor die allgemeine Formel

$$(54) \quad \frac{m-n}{p-q} \cdot \frac{(m+n)a + (m-n)b}{(p+q)a + (p-q)b}.$$

Auch für diese rationale Lösung können alle konstanten Faktoren von der Form $\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}$ vorkommen, da $m \pm n$ und $p \pm q$ jede Zahl bedeuten können. Nur darf man nicht $m = n$ oder $p = q$ setzen. Es kann hier als konstanter Faktor auch $\frac{a+b}{a-b}$ vorkommen. Dieser Fall ist jedoch schon oben durch die Gleichungen 22—25 abgethan. Nehmen wir als konstante Faktoren

$$\frac{2a+b}{2b+a}, \quad \frac{2a-b}{2b-a}, \quad \frac{3a+b}{3b+a}, \quad \frac{3a-b}{3b-a}, \quad \frac{3a+2b}{3b+2a},$$

so sind zunächst die entsprechenden Quotientengleichungen zu bilden:

$$(55) \quad \begin{aligned} &1. \quad \frac{5a+4b+3x}{4(2b+a)} = \frac{2(2a+b)}{5a+4b-3x} \\ &2. \quad \frac{3x+5a-4b}{4(2b-a)} = \frac{2(2a-b)}{3x-5a+4b} \\ &3. \quad \frac{5a+3b+4x}{3(3b+a)} = \frac{3a+b}{5a+3b-4x} \end{aligned}$$

$$\text{VIf.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

$$(55)\quad \begin{cases} 4. & \dfrac{4x+5a-3b}{3(3b-a)} = \dfrac{3a-b}{4x-5a+3b} \\ 5. & \dfrac{13a+12b+5x}{6(3b+2a)} = \dfrac{4(3a+2b)}{13a+12b-5x}. \end{cases}$$

Aus diesen ergeben sich leicht die folgenden Gleichungen:

97. $\dfrac{3x+a+2b}{3x-a+4b} = \dfrac{2a+b}{2b+a} \cdot \dfrac{7a+8b+3x}{13a+8b-3x}$

98. $\dfrac{x+3a-2b}{x-3a+4b} = \dfrac{2a-b}{2b-a} \cdot \dfrac{7a-8b+3x}{13a-8b-3x}$

99. $\dfrac{2a+b+x}{2a+3b-x} = \dfrac{3a+b}{3b+a} \cdot \dfrac{3a+3b+2x}{7a+3b-2x}$

100. $\dfrac{4x-a-b}{7a+3b-8x} = \dfrac{3a-b}{3b-a} \cdot \dfrac{4x+3a+3b}{8x-a+3b}$

101. $\dfrac{5x+a+4b}{5x-a+6b} = \dfrac{3a+2b}{3b+2a} \cdot \dfrac{21a+24b+5x}{31a+24b-5x}$

L. $x = \pm a$.

Die Lösungen in 9) und 10) waren rational. Für diese Lösungen können alle konstanten Faktoren vorkommen, welche in dem Quotienten

$$(56)\quad \frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}$$

enthalten sind. Nur zwei Ausnahmen fanden statt. Für die Lösung $x = \pm (a-b)$ durfte im Zähler oder Nenner des konstanten Faktors kein $a-b$ vorkommen, für die Lösung $x = \pm a$ nicht a oder b allein.

Was hier oben für die rationalen Lösungen $x = \pm (a-b)$ und $x = \pm a$ nachgewiesen ist, gilt für jede rationale Lösung von der Form $x = \pm (\alpha a + \beta b)$:

Für jede beliebige rationale Lösung

$$x = \pm (\alpha a + \beta b)$$

lassen sich unendlich viele Gleichungen von der hier verlangten Form aufstellen, in welchen die Koefficienten μ, ν, μ_1 und ν_1 des konstanten Faktors, zwei Fälle ausgenommen, keiner Beschränkung unterworfen sind.

Wir wollen das an einem Beispiele zeigen. Es möge als rationale Lösung

$$11)\quad x = \pm (3a - 2b)$$

$$\text{Vgl. } \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

gegeben sein. Dann hat man:

$$x^2 = (3a + 2b)^2 - 24ab$$

$$\frac{3a + 2b + x}{6b} = \frac{4a}{3a + 2b - x}.$$

Hieraus erhält man als allgemeinen Ausdruck für den konstanten Faktor

$$\frac{2m + 3n}{2p + 3q} \cdot \frac{ma + nb}{pa + qb}.$$

Da m, n, p und q beliebige Zahlen sein können, so ist damit die Behauptung bewiesen. Nur darf $2m + 3n$ und $2p + 3q$ nicht $= 0$ werden.

Nehmen wir für die angegebene Lösung zwei Beispiele. Es soll der konstante Faktor

$$1.\ \frac{a+b}{a-b}, \quad 2.\ \frac{2a+b}{2b+a}$$

werden. Dann hat man die entsprechenden Quotientengleichungen zu bilden:

$$1.\ \frac{x + 2a - 3b}{5(a-b)} = \frac{a+b}{x - 2a + 3b}$$

$$2.\ \frac{23a + 22b + 3x}{16(2b + a)} = \frac{14(2a + b)}{23a + 22b - 3x}.$$

Hieraus als einfachste Fälle entsprechend:

102. $\dfrac{a - 4b + x}{7a - 8b - x} = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{x + 3a - 4b}{x + 3a + 8b}$

103. $\dfrac{3x - 5a + 8b}{3x - 7a + 10b} = \dfrac{2a+b}{2b+a} \cdot \dfrac{37a + 50b + 3x}{55a + 38b - 3x}$ u. s. w.

L. $x = \pm (3a - 2b)$.

g. Die oben in e. und f. entwickelten Gleichungen enthalten fast nur konstante Faktoren von ziemlich ansprechender Form. Es ist gesagt, dafs die Gleichungen [18—28], welche in IV behandelt sind, als die ursprünglicheren angesehen werden müssen. Legt man diese Gleichungen zum Grunde, um Gleichungen von der hier verlangten Form zu bilden, so kommt man bei direkter Behandlung meistens auf konstante Faktoren von ungeschickter Form. Von der Gleichung [20] ist das oben bei (21) nachgewiesen. Es ist jedoch nicht ohne Interesse zu untersuchen, wie sich jene Quotientengleichungen der hier verlangten Form anpassen.

Die Gleichung [18] führt direkt auf die in 62—65 aufgestellten Gleichungen.

Für die Gleichung [19] hat man

$$\frac{a+4b+x}{a-4b+x} = \frac{3b-a+x}{3b+a-x}, \quad \text{L. } x = \sqrt{a^2+12b^2},$$

$$\frac{2x+7b}{2a-b} = \frac{2a+b}{2x-7b}.$$

Hieraus, indem wir hier, wie auch bei den folgenden Beispielen, immer nur einen der einfachsten Fälle nehmen,

104. $\frac{x+a+4b}{x+a-4b} = \frac{2a+b}{2a-b} \cdot \frac{x+a+3b}{x+a-3b}$.

L. $x = \sqrt{a^2+12b^2}$.

Die Gleichung [20] ist schon oben bei (21) behandelt. — Die Gleichung [21] giebt

$$\frac{a-b+x}{6a} = \frac{6b}{b-a+x},$$

führt also auf den Faktor $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$. — Die Gleichung [22] führt auf denselben Faktor.

Für die Gleichung [23]

$$\frac{3a-2b+3x}{a-2b+x} = \frac{x-a+2b}{3x-3a+2b}, \quad \text{L. } x = \sqrt{a(a-b)},$$

hat man nach dem KS.

$$\frac{5a-4b+4x}{3a-4b} = \frac{3a-4b}{5a-4b-4x}.$$

Da der Nenner links und der Zähler rechts einander gleich sind, so kommt man auf den konstanten Faktor 1, d. h. wieder auf eine einfache Quotientengleichung. Um Beispiele für die Lösung zu erhalten, kann man die Gleichung irgendwie durch korr. Add. verändern und die entstandene Gleichung umbilden, wie die andern Quotientengleichungen. Einfacher bildet man jedoch direkt aus der Lösung:

$$x^2 = a(a-b)$$

$$\frac{x}{a-b} = \frac{a}{x}.$$

Daher allgemein

105. $\frac{mx + an}{(a-b)m + nx} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{px + (a-b)q}{ap + qx}$

L. $x = \sqrt{a(a-b)}$.

Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, 2, 1, 2, so erhält man:

106. $\frac{x+a}{x+a-b} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{x+a-b}{x+a}$

107. $\frac{x+2a}{2x+a-b} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{x+2a-2b}{2x+a}$

L. $x = \sqrt{a(a-b)}$.

Für die Gleichung [24]

$$\frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b}, \quad \text{L. } x = \sqrt{a^2 - b^2},$$

hat man

$$\frac{8a - 7b + 4x}{4a - 5b} = \frac{12a - 13b}{8a - 7b - 4x}.$$

Bildet man hieraus die entsprechende allgemeine Gleichung und setzt in derselben für m, n, p, q bezw. 1), 1, — 1, 1, 1; 2) 2, — 1, 2, — 3, so erhält man:

108. $\frac{2x - 2a + 3b}{2x - 2a + b} = \frac{12a - 13b}{4a - 5b} \cdot \frac{3(a-b) + x}{5(a-b) - x}$

109. $\frac{8x + 4a - b}{8x + 4a + b} = \frac{12a - 13b}{4a - 5b} \cdot \frac{4x - 3b}{12x - 5b}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Man vergleiche die Entwickelungen oben in f. bei 3). Der hier vorkommende konstante Faktor ist in dem Ausdruck (36) enthalten; man hat hierin nur $m = 3$, $n = -2$, $p = 2$, $q = -1$ zu setzen.

Die Gleichung [25]

$$\frac{5a - 6b + x}{a + x} = \frac{3a - 5b + 3x}{a + b + x}, \quad \text{L. } x = \sqrt{(a-b)(a+3b)},$$

führt auf

$$\frac{b - 2a + 2x}{b} = \frac{12a - 13b}{2a - b + 2x}, \quad \text{also auf}$$

110. $\frac{5a - 6b + x}{a + x} = \frac{12a - 13b}{b} \cdot \frac{b - a + x}{7a - 7b + x}$

L. $x = \sqrt{(a-b)(a+3b)}$.

$$\text{VIh.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{C}{D}.$$

Die Gleichung [26]

$$\frac{a+b-x}{3a-b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-5b+x}, \quad x = \sqrt{a^2-ab+b^2},$$

giebt

$$\frac{5a-4b+4x}{3a-8b} = \frac{3a}{5a-4b-4x}, \text{ also}$$

111. $\frac{x+2a-b}{x-2a+3b} = \frac{3a}{8b-3a}\cdot\frac{2x+a+2b}{2x-a+2b}$

L. $x = \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

Die Gleichung [27]

$$\frac{7a+b-x}{5a+3b-3x} = \frac{3(a-b+x)}{a-17b+x}, \quad x = \sqrt{a^2+14ab+b^2}$$

giebt

$$\frac{2a-b+x}{6b-a} = \frac{3a}{b-2a+x}, \text{ also}$$

112. $\frac{x+5a-b}{x-3a+7b} = \frac{3a}{6b-a}\cdot\frac{x+a+5b}{x+a+b}$

L. $x = \sqrt{a^2+14ab+b^2}$.

Die Gleichung [28] führt auf den konstanten Faktor $\frac{a}{b}$, der schon in V oft genug vorkommt.

h. Alle bisher in diesem Abschnitt vorgekommenen Gleichungen sind rein quadratisch. Es ist daher noch die Frage zu erörtern:

> Lassen sich auch vollständige quadratische Gleichungen auf die hier behandelte Form bringen, und welche Beziehung haben die konstanten Faktoren zu den Wurzeln der Gleichung?

Oben in Vm. ist gezeigt worden, dafs jede vollständige quadratische Gleichung, deren Wurzeln a und b sind, auf die in V behandelte Form gebracht werden kann, wo also der konstante Faktor $\frac{a}{b}$ ist. Da nun ganz allgemein $\alpha a + \beta b$ statt a, $\alpha_1 a + \beta_1 b$ statt b gesetzt werden kann, so folgt daraus:

> Wie auch die Wurzeln einer vollständigen quadratischen Gleichung sein mögen, man

kann dieselbe stets auf die hier behandelte Form bringen. Der Zähler des konstanten Faktors wird gleich der einen Wurzel, der Nenner gleich der andern Wurzel.

Sollen z. B. die Wurzeln der Gleichung 1) $a+b$, $a-b$; 2) $2a+b$, $2b+a$; 3) $3a-b$, $3b-a$; 4) $3a+2b$, $3b+2a$ sein, so hat man nur in einer der in Vm. aufgestellten Gleichungen diese Wurzeln bezw. statt a und b zu setzen. So erhält man aus der Gleichung 100 in V

$$\frac{2a+b-x}{2b+a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b+x}{a+x} \cdots \text{L. } x = a, b$$

die folgenden:

113. $\frac{3a+b-x}{3a-b-x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-b+x}{a+b+x}$ [s. 119]

L. $x = a+b$, $a-b$.

114. $\frac{5a+4b-x}{5b+4a-x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{a+2b+x}{b+2a+x}$ [s. 120]

L. $x = 2a+b$, $2b+a$.

115. $\frac{5a+b-x}{5b+a-x} = \frac{3a-b}{3b-a} \cdot \frac{x-a+3b}{x-b+3a}$

L. $x = 3a-b$, $3b-a$.

116. $\frac{8a+7b-x}{8b+7a-x} = \frac{3a+2b}{3b+2a} \cdot \frac{2a+3b+x}{2b+3a+x}$

L. $x = 3a+2b$, $3b+2a$.

Man kann sich diese Gleichungen jedoch auch sehr leicht direkt bilden.

Für den ersten Fall hat man zunächst die Gleichung

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0, \text{ d. h.}$$

$$\frac{2a-x}{a-b} = \frac{a+b}{x}.$$

Daher allgemein

$$\frac{(2a-x)m + (a+b)n}{(a-b)m + nx} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{(2a-x)p + (a-b)q}{(a+b)p + qx}$$

L. $x = a+b$, $a-b$.

Setzt man hierin für m, n, p, q bezw. 1, 1, 1, 1, so kommt man auf 112. Setzt man weiter 1) 2, 1, 2, 1; 2) 1, 2, 1, 2; 3) -1, 2, -1, 2, so giebt das:

117. $\frac{5a+b-2x}{5a-b-2x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{2a-2b+x}{2a+2b+x}$ [s. 119_1]

118. $\frac{4a+2b-x}{4a-2b-x} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{a-b+2x}{a+b+2x}$

119. $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{2x-a+b}{2x-a-b}$

L. $x = a+b,\ a-b$.

Für den zweiten Fall hat man zunächst

$$x^2 - 3(a+b)x + (2a+b)(2b+a) = 0$$

$$\frac{3a+3b-x}{2b+a} = \frac{2a+b}{x} \text{ u. s. w.}$$

Um für eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln a und b sind, die möglichen konstanten Faktoren zu bestimmen, falls sie auf die hier verlangte Form gebracht werden soll, hat man:

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

$$\frac{a+b-x}{b} = \frac{a}{x}$$

$$(57)\quad \frac{(a+b-x)m+bn}{(a+b-x)p+bq} = \frac{am+nx}{ap+qx}.$$

Nach dem oben in f. gezeigten und vielfach angewendeten Verfahren erhält man aus (57) als allgemeinen Ausdruck für die hier möglichen konstanten Faktoren

$$(58)\quad \frac{m+n}{p+q} \cdot \frac{am+bn}{ap+bq}.$$

Dieser Ausdruck ist von dem in (52) entwickelten nicht verschieden. Die Wurzeln der Gleichung sind hier a und b. Sollen dieselben statt dessen bezw. $\alpha a + \beta b$ und $\alpha_1 a + \beta_1 b$ sein, so wird der allgemeine Ausdruck für den konstanten Faktor

$$\frac{m+n}{p+q} \cdot \frac{am_1+bn_1}{ap_1+bq_1},$$

wo m_1, n_1, p_1 und q_1 ganz beliebige Zahlen sind. Wir haben daher den Satz:

Jede vollständige quadratische Gleichung mit beliebigen rationalen Wurzeln $\alpha a + \beta b$ und $\alpha_1 a + \beta_1 b$ läfst sich auf die hier verlangte Form bringen, wo der konstante Faktor alle

Werte haben kann, welche in dem Quotienten (56) enthalten sind. Nur zwei Fälle sind ausgenommen; es darf nicht $m + n$ oder $p + q = 0$ werden.

Wir wollen im Folgenden einige Beispiele durchführen. : Wurzeln der aufzustellenden Gleichungen sollen gegeben 1. Die konstanten Faktoren werden beliebig angenommen.. sollen die zugehörigen Gleichungen aufgestellt werden.

Die Wurzeln der aufzustellenden Gleichungen seien

$$1)\quad x_1 = a, \quad x_2 = b.$$

an mögen als konstante Faktoren angenommen werden:

$$1.\ \frac{2a+b}{2b+a} \quad 2.\ \frac{2a-b}{2b-a} \quad 3.\ \frac{3a+b}{3b+a} \quad 4.\ \frac{3a-b}{3b-a}.$$

n kommt zunächst auf die entsprechenden Quotienten-ichungen:

$$(59)\quad \begin{aligned} &1.\quad \frac{a+b+x}{2b+a} = \frac{2a+b}{2a+2b-x} \\ &2.\quad \frac{2a+2b-3x}{2b-a} = \frac{2a-b}{3x-a-b} \\ &3.\quad \frac{3a+3b-2x}{3b+a} = \frac{3a+b}{a+b+2x} \\ &4.\quad \frac{3a+3b-4x}{3b-a} = \frac{3a-b}{4x-a-b}. \end{aligned}$$

Man entwickelt am besten aus der Gleichung, welche gegebenen Wurzeln hat, d. h. aus

$$x^2 - (a+b)\,x + ab = 0$$

allgemeine Quotientengleichung. Man hat, wie oben,

$$\frac{a+b-x}{b} = \frac{a}{x}$$

$$\frac{(a+b-x)m+bn}{(a+b-x)p+bq} = \frac{am+nx}{ap+qx}.$$

eraus ergiebt sich, indem man nach dem KS. x erstens s dem Nenner, zweitens aus dem Zähler fortschafft, die gemeine Quotientengleichung

$$(60)\quad \begin{aligned} &\frac{m(p+q)a + q(m+n)b + (np-mq)\,x}{(p+q)\,(ap+bq)} \\ &= \frac{(m+n)\,(am+bn)}{p(m+n)a + n(p+q)b + (mq-np)x}. \end{aligned}$$

$$\text{VIb.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Der konstante Faktor ist daher allgemein

$$(61)\quad \frac{m+n}{p+q} \cdot \frac{am+bn}{ap+bq}.$$

Um die oben angegebenen konstanten Faktoren zu erhalten, hat man daher für m, n, p und q bezw. zu setzen 1) 2, 1, 1, 2; 2) 2, − 1, — 1, 2; 3) 3, 1, 1, 3; 4) 3, — 1, — 1, 3. Dann giebt die Gleichung (60) die Gleichungen in (59). Aus den Gleichungen in (59) erhält man dann die entsprechenden einfachen Fälle:

120. $\frac{3a+2b+x}{3b+2a+x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{3a+4b-x}{3b+4a-x}$ [s. 87_8]

121. $\frac{4a+b-3x}{4b+a-3x} = \frac{2a-b}{2b-a} \cdot \frac{3x-2a+b}{3x-2b+a}$ [s. 87_9]

122. $\frac{3a+2b-x}{3b+2a-x} = \frac{3a+b}{3b+a} \cdot \frac{a+2b+x}{b+2a+x}$

123. $\frac{3a+b-2x}{3b+a-2x} = \frac{3a-b}{3b-b} \cdot \frac{2x-a+b}{2x+a-b}$

L. $x = a, b$.

Die Wurzeln der Gleichungen seien

$$2)\quad x_1 = a+b,\quad x_2 = a-b.$$

Die konstanten Faktoren sollen die oben angegebenen sein.

Um hier zu den betreffenden Gleichungen zu gelangen, kann man auch andere Wege einschlagen, als es bei 1) geschehen ist.

Für den ersten Fall mufs man zunächst eine Quotientengleichung von der Form bilden

$$(62)\quad \frac{\alpha a + \beta b + \gamma x}{2b+a} = \frac{\mu(2a+b)}{\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x}.$$

Diese Gleichung mufs mit der Gleichung, welche sich direkt aus den Wurzeln ergiebt, d. h. mit

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

identisch werden. Man findet, wenn man $\gamma = \gamma_1 = 1$ setzt,

$$\mu = -\tfrac{8}{9},\ \text{und}$$

$$\alpha = \tfrac{1}{3},\quad \beta = \tfrac{5}{3},\quad \alpha_1 = -\tfrac{7}{3},\quad \beta_1 = -\tfrac{5}{3}\ \text{oder}$$

$$\alpha = -\tfrac{7}{3},\quad \beta = -\tfrac{5}{3},\quad \alpha_1 = \tfrac{1}{3},\quad \beta_1 = \tfrac{5}{3}.$$

$$\text{VIh.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Das giebt

$$\frac{a+5b+3x}{2b+a} = \frac{8(2a+b)}{7a+5b-3x}.$$

Die andern Werte von α, β, α_1 und β_1 geben dieselbe Gleichung, nur mit Vertauschung des Zählers links und des Nenners rechts.

Man kann aber auch so schliefsen. Die Gleichung (62) mufs erfüllt werden durch $x = a + b$ und durch $x = a - b$. In dem einen Fall müssen Zähler und Zähler, wie Nenner und Nenner proportional sein; im andern Fall jeder Zähler mit seinem Nenner, da ein dritter Fall nicht denkbar ist.

Ist der Proportionalitätsfaktor im ersten Fall u, im zweiten Fall v, so müssen die Gleichungen richtig sein:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha+\gamma)a + (\beta+\gamma)b = (2a+b)u \\ (\alpha+\gamma)a + (\beta-\gamma)b = (2b+a)v \end{array} \right|.$$

Mithin auch:

$$\begin{bmatrix} \alpha+\gamma = 2u \\ \beta+\gamma = u \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha+\gamma = v \\ \beta-\gamma = 2v \end{bmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen sind u und v zu eliminiren. Man erhält

$$\left| \begin{array}{l} \alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right|,$$

d. h. $\alpha = 7$, $\beta = 5$, $\gamma = -3$. Man findet ähnlich $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 5$, $\gamma_1 = 3$. Dann wird $\mu = 8$ u. s. w.

Die beiden hier angegebenen Wege sind jedoch sehr umständlich. Der oben bei 1) angegebene allgemeine Weg ist der einfachste. Man hat aus (62_1):

$$\frac{2a-x}{a-b} = \frac{a+b}{x}$$

$$\frac{(2a-x)m + (a-b)n}{(2a-x)p + (a-b)q} = \frac{(a+b)m + nx}{(a+b)p + qx}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nach dem schon vielfach angewendeten Verfahren die gesuchte allgemeine Quotientengleichung

$$(63)\quad \begin{array}{l} \dfrac{(mp+2mq+nq)a + (mp-nq)b - (mq-np)x}{(p+q)\left((q+p)a + (p-q)b\right)} \\ = \dfrac{(m+n)\left((m+n)a + (m-n)b\right)}{(mp+2np+nq)a + (mp-nq)b + (mq-np)x}. \end{array}$$

$$\text{VIh.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{C}{D}.$$

Der konstante Faktor mufs daher allgemein werden

$$\frac{m+n}{p+q} \cdot \frac{(m+n)a+(m-n)b}{(p+q)a+(p-q)b}.$$

Sollen hieraus die oben angegebenen vier konstanten Faktoren hervorgehen, so mufs man für m, n, p, q bezw. setze 1) 3, 1, 3, $-$ 1; 2) 1, 3, 1, $-$ 3; 3) 2, 1, 2, $-$ 1; 4) 1, 2, 1, $-$ 2. Dann erhält man aus (63) entsprechend:

$$(64)\quad \begin{aligned} &1.\ \frac{a+5b+3x}{2(a+2b)} = \frac{4(2a+b)}{7a+5b-3x} \\ &2.\ \frac{3x-7a+5b}{2(2b-a)} = \frac{4(2a-b)}{3x+a-5b} \\ &3.\ \frac{4x-a+5b}{a+3b} = \frac{3(3a+b)}{7a+5b-4x} \\ &4.\ \frac{4x-7a+5b}{3b-a} = \frac{3(3a-b)}{4x-a-5b}. \end{aligned}$$

Die 2. Gleichung folgt aus der ersten, wenn man $-b$ statt b setzt; ebenso die 4. aus der 3.

Als einfachste Fälle erhält man aus den Gleichungen (64) entsprechend:

124. $\frac{3a+3b+x}{3a+3b-x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{5a+13b+3x}{11a+7b-3x}$

125. $\frac{3x+a+b}{3x-a-b} = \frac{2a-b}{2b-a} \cdot \frac{3x-11a+13b}{3x+5a-7b}$

126. $\frac{2a+2b+x}{2a+2b-x} = \frac{3a+b}{3b+a} \cdot \frac{a+7b+2x}{5a+3b-2x}$

127. $\frac{2x+a+b}{2x-a-b} = \frac{3a-b}{3b-a} \cdot \frac{2x-5a+7b}{2x+a-3b}$

L. $x = a+b,\ a-b$.

Die Wurzeln der Gleichungen sollen

$$3)\quad x_1 = 2a-b,\ x_2 = 2b-a$$

sein. Als konstante Faktoren mögen angenommen werden:

$$\frac{a}{b},\quad \frac{a+b}{a-b},\quad \frac{2a-b}{2b-a},\quad \frac{2a+b}{2b+a},\quad \frac{3a+b}{3b+a}.$$

Nach dem oben angewendeten Verfahren ist zunächst die Gleichung aufzustellen, welche die gegebenen Wurzeln hat, und aus dieser die allgemeine Quotientengleichung zu entwickeln. Man hat

$$x^2-(a+b)x+(2a-b)(2b-a)=0$$

$$\frac{a+b-x}{2b-a}=\frac{2a-b}{x}$$

$$\frac{(a+b-x)m+(2b-a)n}{(a+b-x)p+(2b-a)q}=\frac{(2a-b)m+nx}{(2a-b)p+qx}.$$

Hieraus nach dem bekannten Verfahren

$$(65)\quad \frac{(2mp-nq+mq)a+(2nq-mp+mq)b+(np-mq)x}{(p+q)((2p-q)a+(2q-p)b)}$$
$$=\frac{(m+n)((2m-n)a+(2n-m)b)}{(2mp-nq+np)a+(2nq-mp+np)b+(mq-np)x}.$$

Der allgemeine Ausdruck für den konstanten Faktor wird daher

$$(66)\quad \frac{m+n}{p+q}\cdot\frac{(2m-n)a+(2n-m)b}{(2p-q)a+(2q-p)b}.$$

Soll hieraus der oben angegebene 2. konstante Faktor entstehen, so mufs man setzen $2p-q=p-2q$, d. h. $p+q=0$. Das ist wegen des voranstehenden Faktors nicht zulässig. Bei den angegebenen Wurzeln kann daher $\frac{a+b}{a-b}$ nicht als konstanter Faktor vorkommen. Dies gilt auch für die in 1) angegebenen Wurzeln.

Um die andern vier oben angenommenen konstanten Faktoren zu erhalten, hat man in (66) für m, n, p, q bezw. zu setzen: 1) 2, 1, 1, 2; 2) 1, 0, 0, 1; 3) 5, 4, 4, 5; 4) 7, 5, 5, 7. Dann geht (65) entsprechend über in:

$$(67)\quad \begin{aligned}
&1.\ \frac{2a+2b-x}{3b}=\frac{3a}{a+b+x}\\
&2.\ \frac{a+b-x}{2b-a}=\frac{2a-b}{x}\\
&3.\ \frac{5a+5b-x}{3(2b+a)}=\frac{3(2a+b)}{4a+4b+x}\\
&4.\ \frac{7a+7b-2x}{3(3b+a)}=\frac{3(3a+b)}{5a+5b+2x}.
\end{aligned}$$

Hieraus als einfachste Fälle entsprechend:

128. $\frac{5a+2b-x}{5b+2a-x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a+4b+x}{b+4a+x}$

129. $\frac{x-5a+b}{x-5b+a}=\frac{2a-b}{2b-a}\cdot\frac{2x-a+2b}{2x-b+2a}$

130. $\frac{11a + 8b - x}{11b + 8a - x} = \frac{2a + b}{2b + a} \cdot \frac{7a + 10b + x}{7b + 10a + x}$

131. $\frac{8a + 5b - x}{8b + 5a - x} = \frac{3a + b}{3b + a} \cdot \frac{4a + 7b + x}{4b + 7a + x}$

L. $x = 2a - b,\ 2b - a.$

VII. $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{C}{D}$.

33. $\left(\frac{5a - 3b + x}{5b - 3a + x}\right)^2 = \frac{7a - 9b + 3x}{7b - 9a + 3x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

33_1. $\left(\frac{a + 5b + x}{b + 5a + x}\right)^2 = \frac{a + 17b + x}{b + 17a + x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

33_2. $\left(\frac{7a - b + x}{7b - a + x}\right)^2 = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

33_3. $\left(\frac{4x + 3a + b}{4x + 3b + a}\right)^2 = \frac{6x + 9a + b}{6x + 9b + a}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

33_4. $\left(\frac{x + a + 2b}{x + a + b}\right)^2 = \frac{2x + 3a + 7b}{2x + 3a + 2b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$.

33_5. $\left(\frac{13a - 3b + x}{13b - 3a + x}\right)^2 = \frac{41a + 9b - 3x}{41b + 9a - 3x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 + 82ab + 9b^2}$.

a. Die allgemeine Form der vorstehenden Gleichungen ist

$$(1)\quad \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{C}{D}.$$

Der eigentliche Schlüssel für die Aufstellung dieser Gleichungen liegt in den symmetrischen Gleichungen des 4. Grades. Fast aus jeder symmetrischen Gleichung des

4. Grades kann man beliebig viele Gleichungen von der oben stehenden Form ableiten. Es ist nur die einfache Darstellung von t_4, welche aus einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades abgeleitet ist, gleich einer beliebigen andern Darstellung von t, und x statt r zu setzen. Erhebt man dann zur 4. Potenz, so mufs die Gleichung die verlangte Form haben. Nur ein Umstand ist dabei zu beachten; man mufs die zweite Darstellung von t so wählen, dafs sich schliefslich x^3 forthebt; sonst wird die Gleichung kubisch anstatt quadratisch.

In der angedeuteten Weise ergeben sich aus den Darstellungen von t in I. bei (7), (11), (38) und (43) bezw. die Gleichungen:

1. $$\left(\frac{3a + 2b + 3x}{3a - 2b + 3x}\right)^2 = \frac{5a + 12b + 13x}{5a - 12b + 13x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. $$\left(\frac{a + 2b + x}{a - 2b + x}\right)^2 = \frac{5x - 3a + 4b}{5x - 3a - 4b}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. $$\left(\frac{a + 9b + x}{a + b + x}\right)^2 = \frac{5a + 49b + x}{5a + b + x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

4. $$\left(\frac{a + 2b + x}{a - 2b + x}\right)^2 = \frac{5a + 4b - 3x}{5a - 4b - 3x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

In derselben Weise ergiebt sich 33 aus der 4. und 11. Darstellung von t bei (8) in V. Eine zweite Gleichung dieser Form ergiebt sich aus der 7. und 13. Darstellung, nämlich

5. $$\left(\frac{3a - b + x}{3b - a + x}\right)^2 = \frac{9a - 7b + 3x}{9b - 7a + 3x}$$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Die Gleichung 33_1 ergiebt sich aus der 7. und 13. Darstellung von t in V. bei (6); die Gleichung 33_2 aus der 4. und 11. Darstellung, welche dort angegeben sind.

Die Gleichung 33_5 ergiebt sich aus der 3. und 11. Darstellung von t in V. bei (17). Aus der 8. und 13. Darstellung würde man erhalten

$$6.\quad \left(\frac{3a + 7b + x}{3b + 7a + x}\right)^2 = \frac{9a + 41b + 8x}{9b + 41a + 8x}$$

$$\text{L.}\quad x = \sqrt{9a^2 + 82ab + 9b^2}.$$

So lassen sich aus jeder symmetrischen Gleichung des 4. Grades mit Hülfe der Darstellungen von t direkt stets zwei quadratische Gleichungen von der hier behandelten Form ableiten, wenn sich überhaupt eine solche direkt ableiten läfst. Indirekt lassen sich überhaupt stets beliebig viele aus den Darstellungen von t ableiten.

Entwickelt man, um auch die Gleichungen 33_3 und 33_4 auf dem oben angegebenen Wege abzuleiten, aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grades

$$(2)\quad \left(\frac{x^2 + 4xy + y^2}{x^2 - 4xy + y^2}\right)^2 = \frac{a}{b}\ .$$

die Darstellungen von t, so erhält man:

$$1.\ \sqrt{\frac{3r+b}{r+3b}}\quad 2.\ \sqrt{\frac{3a+r}{3r+a}}\quad 3.\ \sqrt{\frac{3a+b+4r}{3b+a+4r}}\quad 4.\ \sqrt{\frac{3a-b-2r}{a-3b+2r}}$$

$$5.\ \sqrt{\frac{3b-3a+8r}{9b-a}}\quad 6.\ \sqrt{\frac{9a-b}{8a-3b+8r}}\quad 7.\ \sqrt[4]{\frac{9a+b+6r}{9b+a+6r}}$$

$$r = \sqrt{ab}.$$

Setzt man die 3. und 7. Darstellung einander gleich und x statt r, so erhält man die Gleichung 33_3.

Aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grades

$$(3)\quad \frac{(x^2 - 10xy + y^2)(x-y)^2}{8xy(x^2+y^2)} = \frac{a}{b}$$

erhält man als Darstellungen von t:

$$1.\ \sqrt{\frac{r-b}{a}}\quad 2.\ \sqrt{\frac{a+3b}{r+b}}\quad 3.\ \sqrt{\frac{a+2b+r}{a+b+r}}$$

$$4.\ \sqrt{\frac{a+4b-r}{b-a+r}}\quad 5.\ \sqrt[4]{\frac{3a+7b+2r}{3a+2b+2r}}$$

$$r = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}.$$

Aus der 3. und 5. Darstellung ergiebt sich die Gleichung 33_4.

Wollte man die Darstellungen von t bei (3) in I. zur Aufstellung von Gleichungen der hier verlangten Form benutzen, so würde man sich vergeblich bemühen. Man würde nämlich, wenn man irgend eine Darstellung von t, die durch eine Quadratwurzel ausgedrückt ist, gleich der letzten Darstellung setzte, eine Gleichung folgender Art erhalten:

$$\left(\frac{\alpha a + \beta b + \gamma x}{\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x}\right)^2 = \frac{3(5a + b + x)}{5b + a + x}.$$

Hier kann sich x^3 nie fortheben; denn es müfste

$$\frac{\gamma^2}{\gamma_1{}^2} = \frac{3}{1}$$

sein, was nicht möglich ist, wenn, wie hier überall vorausgesetzt ist, die Koefficienten rational sind. — Ähnliches gilt von den Darstellungen bei (5) und (6) in I.

b. Die Frage, welche uns hier weiter entgegentritt, ist:

Wie stellt man Gleichungen von der hier verlangten Form direkt auf?

Ferner:

Lassen sich für eine gegebene Lösung solche Gleichungen in beliebiger Anzahl aufstellen?

Aus jeder Gleichung von der in I. behandelten Form läfst sich eine Gleichung von der hier verlangten Form entweder direkt hinschreiben oder nach den dort angegebenen Transformationen leicht ableiten. Da nun in I. nachgewiesen ist, dafs sich für jede Lösung, für welche eine Gleichung von der dort behandelten Form möglich ist, auch beliebig viele von derselben Form aufstellen lassen, so kann man auch für jede solche Lösung beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Form aufstellen.

Die Gleichung 10, welche in I. zu Anfang steht, heifst als Quotientengleichung geschrieben

$$(4)\ \frac{9a-7b+3x}{3a+3b+x} = \frac{3a+3b+x}{9b-7a+3x}, \quad \text{L. } x = \sqrt{9a^2 - 14ab + b^2}.$$

Setzen wir den Wert dieser Quotienten $= X$, so haben wir nach dem KS. durch Addition und Subtraktion auch:

$$(5)\ X = \frac{3a - b + x}{3b - a + x} \qquad (6)\ X = \frac{3a - 5b + x}{5a - 3b - x}.$$

Bildet man nun X^2, indem man einerseits die Quotienten in (5) und (6) quadrirt, andrerseits die Quotienten in (4) mit einander multiplicirt, so erhält man durch Gleichsetzung die beiden folgenden Gleichungen:

7. $\left(\frac{3a - b + x}{3b - a + x}\right)^2 = \frac{9a - 7b + 3x}{9b - 7a + 3x}$

8. $\left(\frac{3a - 5b + x}{3b - 5a + x}\right)^2 = \frac{9a - 7b + 3x}{9b - 7a + 3x}$ [vgl. 33]

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Die Gleichungen sind beide quadratisch, da x^3 sich fortheben mufs.

Die Bildung solcher Gleichungen aus den in I. vorkommenden Gleichungen ist dann stets sehr einfach, wenn die Koefficienten von x in den links stehenden Faktoren einander gleich sind, wie hier in $9a - 7b + 3x$ und $9b - 7a + 3x$, nämlich $3 = 3$.

In derselben Weise bildet man aus [11] die Quotientengleichung

$$\frac{17a + b + x}{3a + 3b + 3x} = \frac{3a + 3b + 3x}{17b + a + x},$$

hieraus zunächst nach dem KS. die beiden gleichwertigen Quotienten

$$\frac{5a + b + x}{5b + a + x} = \frac{7a - b - x}{a - 7b + x},$$

und hat daher:

9. $\left(\frac{5a + b + x}{5b + a + x}\right)^2 = \frac{17a + b + x}{17b + a + x}$ [s. 33_1]

10. $\left(\frac{x - 7a + b}{x - 7b + a}\right)^2 = \frac{17a + b + x}{17b + a + x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Ebenso bildet man aus den Gleichungen 27 und 29 in I. die Quotientengleichungen:

$$\frac{41a - 7b + 19x}{19a + 19b + 17x} = \frac{19a + 19b + 17x}{41b - 7a + 19x}$$

$$\frac{17a - 31b + 11x}{11a + 11b - 7x} = \frac{11a + 11b - 7x}{17b - 31a + 11x},$$

und erhält aus diesen nach demselben Verfahren:

11. $\left(\frac{5a + b + 3x}{5b + a + 3x}\right)^2 = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$

12. $\left(\frac{11a - 13b + x}{11b - 13a + x}\right)^2 = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$

13. $\left(\frac{7a - 5b + x}{7b - 5a + x}\right)^2 = \frac{17a - 31b + 11x}{17b - 31a + 11x}$

14. $\left(\frac{a - 7b + 3x}{b - 7a + 3x}\right)^2 = \frac{17a - 31b + 11x}{17b - 31a + 11x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

In derselben Weise lassen sich auch die Gleichungen 32 und 34 in I. benutzen. Aus 32 erhält man auf demselben Wege:

15. $\left(\frac{7a + 11b + 3x}{7b + 11a + 3x}\right)^2 = \frac{33a + 81b + 17x}{33b + 81a + 17x}$

16. $\left(\frac{9a - 15b + x}{9b - 15a + x}\right)^2 = \frac{33a + 81b + 17x}{33b + 81a + 17x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Sind jedoch die Koefficienten von x in den links stehenden Faktoren der in I. entwickelten Gleichungen nicht einander gleich, so kann man eine solche Gleichung nicht direkt für den hier vorliegenden Zweck gebrauchen, man muſs sie erst transformieren; sonst werden die auf dem oben angegebenen Wege gebildeten Gleichungen kubisch.

Die Gleichung [8] heiſst als Quotientengleichung, wenn man den Nenner links und den Zähler rechts gleich macht,

$$(7) \quad \frac{5a + b + x}{3a + 3b + 3x} = \frac{3a + 3b + 3x}{3a + 15b + 3x}.$$

Nach dem angewendeten Verfahren erhält man

$$\left(\frac{2a + b + x}{a + 3b + x}\right)^2 = \frac{3(5a + b + x)}{4(5b + a + x)}.$$

Die Gleichung ist kubisch; x^3 hebt sich nicht fort. Die Wurzeln sind:

$$x = a - 7b, \quad \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Die erste Wurzel ist hier hinzugekommen.

$$\text{VIIb.}\quad \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{C}{D}.$$

Die Gleichung (7) hat die Form

$$(8)\quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C},$$

auf welche sich alle in I. vorkommenden Gleichungen bringen lassen. Nach der Formel I in Id. kann man die Gleichung (8) auch so schreiben

$$A(m^2A + 2mnB + n^2C) = (mA + nB)^2,$$

und daher auch

$$A(p^2A + 2pqB + q^2C) = (pA + qB)^2,$$

wo m, n, p und q, wie hier überall, willkürliche Gröfsen sind. Dividirt man die Gleichungen durch einander, so erhält man mit Vertauschung der Seiten

$$(9)\quad \left(\frac{mA + nB}{pA + qB}\right)^2 = \frac{m^2A + 2mnB + n^2C}{p^2A + 2pqB + q^2C},$$

d. h. die Gleichung (8), welche die Form der in I. vorkommenden Gleichungen hat, ist in die Gleichung (9), d. h. in eine Gleichung von der hier verlangten Form transformirt.

Um diese Transformation anzuwenden auf die Gleichung (7), so mufs für diese sein:

$$(10)\quad \begin{aligned} A &= 5a + b + x \\ B &= 3a + 3b + 3x \\ C &= 3a + 15b + 3x. \end{aligned}$$

Diese Werte sind in (9) einzusetzen. Soll dann schliefslich x^3 fortfallen, so mufs sein

$$(11)\quad \left(\frac{m + 3n}{p + 3q}\right)^2 = \frac{m^2 + 6mn + 3n^2}{p^2 + 6pq + 3q^2}.$$

Soll sich nämlich die höchste Potenz von x fortheben, so mufs $x = \infty$ der Gleichung genügen. Dann hat man aber in (9) aus (10) für A nur x, für B und C nur $3x$ zu setzen. Dann erhält man aus (9) die Gleichung (11).

Aus (11) hat man nach dem KS. durch Subtraktion

$$\left(\frac{m + 3n}{p + 3q}\right)^2 = \frac{n^2}{q^2},\ \text{d. h.}$$

$$(12)\quad \frac{m + 3n}{p + 3q} = \pm \frac{n}{q}.$$

Hier ist nur das untere Zeichen zu gebrauchen. Das obere Zeichen führt auf

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}.$$

Substituirt man dies in (9), setzt also $m = p\lambda$, $n = q\lambda$, so wird die Gleichung (9) identisch.

Die Gleichung

$$\frac{m + 3n}{p + 3q} = -\frac{n}{q}$$

enthält 4 Unbekannte, kann also in unendlich vielfacher Weise leicht erfüllt werden. Am einfachsten setzt man zunächst $q = n$. Dann hat man

$$m + p + 6n = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt, indem man für n, m, p bezw. setzt 1) $-1, 5, 1$; 2) $-1, 4, 2$; 3) $-2, 7, 5$; 4) $-2, 9, 3$ u.s.w. Dann erhält man aus (9) mit Benutzung von (10), da $q = n$ ist, folgende Gleichungen:

17. $\left(\frac{11a + b + x}{a - b - x}\right)^2 = \frac{49a + 5b - x}{a + 5b - x}$

18. $\left(\frac{17a + b + x}{7a - b - x}\right)^2 = \frac{59a + 7b - 5x}{11a + 7b - 5x}$

19. $\left(\frac{29a + b + x}{19a - b - x}\right)^2 = \frac{173a + 25b - 23x}{77a + 25b - 23x}$

20. $\left(\frac{13a + b + x}{3a - b - x}\right)^2 = \frac{103a + 11b - 5x}{7a + 11b - 5x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Statt der Transformationsformel I in Id. hätte man auch die Formel III benutzen können. Diese heifst, als Quotientengleichung geschrieben,

$$(13)\quad \frac{m^2A + 2mnB + n^2C}{mpA + (np + mq)B + nqC} = \frac{mpA + (np + mq)B + nqC}{p^2A + 2pqB + q^2C}.$$

Hier können die Gröfsen A, B, C den in (10) angegebenen Wert haben. Um aus dieser Gleichung leicht eine Gleichung von der hier verlangten Form ableiten zu können, müssen nach dem Obigen die Koefficienten links im Zähler und rechts im Nenner einander gleich sein. Dann mufs sein

$$m^2 + 6mn + 3n^2 = p^2 + 6pq + 3q^2.$$

Setzt man hier, wie oben, $q = n$, so erhält man nach Ausscheidung des Faktors $m - p$, wie oben,

$$m + p + 6n = 0.$$

Wählt man jedoch hier die oben angegebenen Werte für m, n, p und q und setzt diese mit Benutzung von (10) in (13) ein, so erhält man nicht gerade die Gleichungen 17—20. Die Formeln (9) und (13) können für dieselben Werte der willkürlichen Gröfsen verschiedene Gleichungen liefern. Setzt man z. B. $m = 5$, $n = -1$, $p = 1$, $q = -1$, wie es oben im ersten Fall geschehen ist, so entsteht aus (13) mit Benutzung von (10) zunächst

$$\frac{49a + 5b - x}{5a + b - 5x} = \frac{5a + b - 5x}{a + 5b - x}.$$

Hieraus nach dem KS. durch Addition und Subtraktion die gleichwertigen Quotienten:

$$1)\ \frac{9a + b - x}{a + b - x} \qquad 2)\ \frac{11a + b + x}{a - b - x}.$$

Daher:

21. $\left(\frac{9a + b - x}{a + b - x}\right)^2 = \frac{49a + 5b - x}{a + 5b - x}$

22. $\left(\frac{11a + b + x}{a - b - x}\right)^2 = \frac{49a + 5b - x}{a + 5b - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Die Gleichung 22 ist identisch mit der Gleichung 17.

Es möge, um noch an einem zweiten Beispiel das Verfahren durchzuführen, die Gleichung [9] gegeben sein. Sie heifst, als Quotientengleichung geschrieben,

$$(14)\quad \frac{5a + b + 3x}{2a + 4b + 2x} = \frac{2a + 4b + 2x}{a + 5b + x}$$

L. $x = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}$.

Nach (8) ist daher hier:

$$(15)\quad \begin{aligned} A &= 5a + b + 3x \\ B &= 2a + 4b + 2x \\ C &= a + 5b + x. \end{aligned}$$

Will man die Gleichung (13) benutzen, so wird man hier, damit die oben angegebene Bedingung erfüllt wird, zu setzen haben

$$3m^2 + 4mn + n^2 = 3p^2 + 4pq + q^2.$$

Nimmt man auch hier $q = n$, so erhält man nach Ausscheidung des Faktors $m - p$

$$3m + 3p + 4n = 0.$$

Man kann daher setzen 1) $n = q = -3$, $m = 5$, $p = -1$; 2) $n = q = -3$, $m = 7$, $p = -3$. Dann liefert die Gleichung (13) mit Benutzung von (15) als Transformationen von (14):

$$(16)\quad \begin{aligned} \frac{37a - 25b + 12x}{20a + 4b + 15x} &= \frac{20a + 4b + 15x}{13a + 35b + 12x} \\ \frac{85a - 37b + 36x}{60a + 12b + 39x} &= \frac{60a + 12b + 39x}{45a + 63b + 36x}. \end{aligned}$$

Aus jeder dieser beiden Quotientengleichungen findet man nach dem KS. durch Addition und Subtraktion eine neue Quotientengleichung, deren Quotienten denen der ursprünglichen Gleichung gleich sind. Mit Benutzung dieser erhalten wir aus den Gleichungen in (16) nach dem schon mehrmals angewendeten Verfahren die vier folgenden Gleichungen:

23. $\left(\frac{19a - 7b + 9x}{11a + 13b + 9x}\right)^2 = \frac{37a - 25b + 12x}{13a + 35b + 12x}$

24. $\left(\frac{3x - 17a + 29b}{3x + 7a - 31b}\right)^2 = \frac{37a - 25b + 12x}{13a + 35b + 12x}$

25. $\left(\frac{29a - 5b + 15x}{7a + 5b + 5x}\right)^2 = \frac{85a - 37b + 36x}{5a + 7b + 4x}$

26. $\left(\frac{3x - 25a + 49b}{x + 5a - 17b}\right)^2 = \frac{85a - 37b + 36x}{5a + 7b + 4x}$

L. $x = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}$.

c. Hat man keine Gleichungen von der in I. behandelten Form zur Hand, ist nur die Lösung im voraus gegeben, so ist es, um Gleichungen von der hier verlangten Form aufzustellen, doch zweckmäſsig, aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung zunächst eine Gleichung von der in I. behandelten Form zu bilden, wie es in Ig. angegeben ist.

Zugleich mufs die so gebildete Gleichung in Bezug auf die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren die oben in b. angegebene Bedingung erfüllen, wenn man nicht erst wieder eine Transformation vornehmen will. Wir wollen das Verfahren an einigen Beispielen durchführen.

Es möge als Lösung

$$1)\quad x = \sqrt{ab}$$

gegeben sein. Hieraus bildet man, wie in Ig. zunächst

$$(17)\quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Nach dem KS. hat man die gleichwertigen Quotienten:

$$1.\ \frac{a+x}{x+b} \qquad 2.\ \frac{a-x}{x-b}.$$

Daher nach dem in b. angegebenen Verfahren die Gleichungen:

27. $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^2 = \frac{a}{b}$

28. $\left(\frac{a-x}{b-x}\right)^2 = \frac{a}{b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Diese Gleichungen sind ein wenig unansehnlich. Will man sie ansehnlicher haben, so mufs man (17) transformiren, entweder direkt, wie es in I. vielfach durchgeführt ist, oder nach den in I. angegebenen Formeln, am besten nach der Formel III, die schon oben in (13) benutzt ist. Dann ist

$$A = a, \quad B = x, \quad C = b.$$

Man erhält aus (13)

$$(18)\quad \frac{m^2a + 2mnx + n^2b}{mpa + (np + mq)x + nqb} = \frac{mpa + (np + mq)x + nqb}{p^2a + 2pqx + q^2b}.$$

Damit die oben in b. angegebene Bedingung erfüllt wird, mufs

$$mn = pq$$

werden. Das ist sehr einfach. Setzt man daher in (18) für m, n, p und q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 3, 2, 2, 3, so erhält man:

$$(19)\quad \left| \begin{array}{l} \frac{4a+4x+b}{2a+5x+2b} = \frac{2a+5x+2b}{a+4x+4b} \\[2mm] \frac{9a+6x+b}{3a+10x+3b} = \frac{3a+10x+3b}{a+6x+9b} \\[2mm] \frac{9a+12x+4b}{6a+13x+6b} = \frac{6a+13x+6b}{4a+12x+9b}. \end{array} \right.$$

Aus jeder dieser Gleichungen hat man nun, wie es oben in b. mehrfach geschehen ist, zwei neue Quotienten zu suchen, die denen der ursprünglichen Gleichung gleich sind, indem man den KS. einmal mit Addition und einmal mit Subtraktion anwendet. So erhält man aus jeder der Gleichungen in (19) zwei Gleichungen von der hier verlangten Form, nämlich folgende:

29. $\left(\frac{2a+b+3x}{2b+a+3x}\right)^2 = \frac{4a+b+4x}{4b+a+4x}$

30. $\left(\frac{x-2a+b}{x-2b+a}\right)^2 = \frac{4a+b+4x}{4b+a+4x}$

31. $\left(\frac{3a+b+4x}{3b+a+4x}\right)^2 = \frac{9a+b+6x}{9b+a+6x}$

32. $\left(\frac{2x-3a+b}{2x-3b+a}\right)^2 = \frac{9a+b+6x}{9b+a+6x}$

33. $\left(\frac{3a+2b+5x}{3b+2a+5x}\right)^2 = \frac{9a+4b+12x}{9b+4a+12x}$

34. $\left(\frac{x-3a+2b}{x-3b+2a}\right)^2 = \frac{9a+4b+12x}{9b+4a+12x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Es möge als Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{a^2+b^2}$$

gegeben sein. Dann hat man

$$\frac{x+a}{b} = \frac{b}{x-a}.$$

Man kann also leicht hinschreiben:

35. $\left(\frac{x+a+b}{x-a+b}\right)^2 = \frac{x+a}{x-a}$

36. $\left(\frac{a-b+x}{a+b-x}\right)^2 = \frac{x+a}{x-a}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Die Gleichungen sind nur durch das Zeichen von x verschieden, was nicht in Betracht kommt.

Will man die Gleichungen ansehnlicher machen, so mufs man (13) anwenden. Dann ist

$$(21) \quad A = x + a, \quad B = b, \quad C = x - a.$$

Setzt man dies in (13), so mufs, wenn die Gleichung die oben in b. angegebenen Eigenschaften haben soll,

$$(22) \quad m^2 + n^2 = p^2 + q^2$$

sein. Diese Gleichung wird am einfachsten erfüllt durch $m = q$, $n = p$. Setzt man daher für m, n, p und q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 3, 2, 2, 3, so geht (13) mit Benutzung von (21) über in

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{5x + 3a + 4b}{4x + 5b} &= \frac{4x + 5b}{5x - 3a + 4b} \\ \frac{5x + 4a + 3b}{3x + 5b} &= \frac{3x + 5b}{5x - 4a + 3b} \\ \frac{13x + 5a + 12b}{12x + 13b} &= \frac{12x + 13b}{13x - 5a + 12b}. \end{aligned}$$

Hieraus, indem man aus je zwei gleichen Quotienten nach dem KS. durch Addition nur einen gleichwertigen neuen Quotienten ableitet, nach dem mehrfach angewendeten Verfahren:

37. $\left(\frac{3x + a + 3b}{3x - a + 3b}\right)^2 = \frac{5x + 3a + 4b}{5x - 3a + 4b}$

38. $\left(\frac{2x + a + 2b}{2x - a + 2b}\right)^2 = \frac{5x + 4a + 3b}{5x - 4a + 3b}$

39. $\left(\frac{5x + a + 5b}{5x - a + 5b}\right)^2 = \frac{13x + 5a + 12b}{13x - 5a + 12b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Gleichung (22) läfst sich auch leicht auf andere Weise erfüllen. Man hat aus derselben

$$(m + p)(m - p) = (q + n)(q - n).$$

Man mufs also nur Zahlen auf doppelte Weise in Faktoren zerlegen. Dann sind die einen Faktoren $m + p$ und $m - p$, die andern $q + n$ und $q - n$. So ist $15 = 5 \cdot 3 = 15 \cdot 1$, und man hat daher $m + p = 5$, $m - p = 3$, $q + n = 15$, $q - n = 1$, also 1) $m = 4$, $p = 1$, $n = 7$, $q = 8$. Weiter ist $24 = 6 \cdot 4 = 12 \cdot 2$. Man erhält 2) $m = 5$, $p = 1$, $q = 7$, $n = 5$. Durch diese Werte von m, n, p und q erhält man mit Benutzung von (21) aus (13) zunächst die beiden Quotientengleichungen:

$$\frac{65x - 33a + 56b}{60x - 52a + 39b} = \frac{60x - 52a + 39b}{65x - 63a + 16b}$$

$$\frac{50x + 50b}{40x - 30a + 40b} = \frac{40x - 30a + 40b}{50x - 48a + 14b}.$$

Bildet man aus je zwei gleichen Quotienten nach dem KS. durch Addition einen neuen gleichwertigen Quotienten, so erhält man nach dem mehrfach angewendeten Verfahren:

40. $\left(\frac{25x - 17a + 19b}{25x - 28a + 11b}\right)^2 = \frac{65x - 33a + 56b}{65x - 63a + 16b}$

41. $\left(\frac{3x - a + 3b}{15x - 13a + 9b}\right)^2 = \frac{x + b}{25x - 24a + 7b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Es sei als Lösung

$$3) \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$(25) \quad \frac{a+b}{x} = \frac{x}{a-b}.$$

Hieraus zunächst

$$1. \frac{a + b + x}{a - b + x}, \quad 2. \frac{a + b - x}{x - a + b}.$$

Daher:

42. $\left(\frac{a + b + x}{a - b + x}\right)^2 = \frac{a+b}{a-b}$

43. $\left(\frac{a + b - x}{x - a + b}\right)^2 = \frac{a+b}{a-b}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Um die Gleichungen etwas ansehnlicher zu machen, ist hier wegen (25) zu setzen:

$$(26) \quad A = a + b, \quad B = x, \quad C = a - b.$$

Denkt man dies in (13) substituirt, so muſs, wenn die Gleichung die oben in b. angegebene Eigenschaft haben soll,

$$mn = pq$$

sein. Diese Bedingung ist am einfachsten zu erfüllen durch $m = q$ und $n = p$, sonst auch vielfach in anderer Weise.

Setzt man daher für m, n, p und q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 3, 2, 2, 3; 4) 6, 1, 3, 2, so geht (13) mit Benutzung von (26) über in

$$(27)\quad \begin{aligned} \frac{5a + 3b + 4x}{4a + 5x} &= \frac{4a + 5x}{5a - 3b + 4x} \\ \frac{5a + 4b + 3x}{3a + 5x} &= \frac{3x + 5x}{5a - 4b + 3x} \\ \frac{13a + 5b + 12x}{12a + 13x} &= \frac{12a + 13x}{13a - 5b + 12x} \\ \frac{37a + 35b + 12x}{20a + 16b + 15x} &= \frac{20a + 16b + 15x}{13a + 5b + 12x}. \end{aligned}$$

Aus diesen Quotientengleichungen erhält man, wenn man zur Bildung eines neuen gleichwertigen Quotienten jedesmal nur den KS. mit Addition zur Anwendung bringt, folgende Gleichungen:

44. $\left(\frac{3a + b + 3x}{3a - b + 3x}\right)^2 = \frac{5a + 3b + 4x}{5a - 3b + 4x}$

45. $\left(\frac{2a + b + 2x}{2a - b + 2x}\right)^2 = \frac{5a + 4b + 3x}{5a - 4b + 3x}$

46. $\left(\frac{5a + b + 5x}{5a - b + 5x}\right)^2 = \frac{13a + 5b + 12x}{13a - 5b + 12x}$

47. $\left(\frac{19a + 17b + 9x}{11a + 7b + 9x}\right)^2 = \frac{37a + 35b + 12x}{13a + 5b + 12x}$.

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Es sei endlich noch

$$4)\quad x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$$

als Lösung gegeben. Dann hat man

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 4a^2 + 12ab + 4b^2 \\ &= (2a + 3b)^2 - 5b^2 \end{aligned}$$

$$\frac{2a + 3b + 2x}{5b} = \frac{5b}{5(2a + 3b - 2x)}.$$

Hier ist daher:

(28) $A = 2a + 3b + 2x,\ B = 5b,\ C = 10a + 15b - 10x.$

Setzt man dies in (13), so mufs sein, damit die Gleichung die in b. angegebene Eigenschaft hat,

$$m^2 - 5n^2 = p^2 - 5q^2$$
$$m^2 - p^2 = 5(n^2 - q^2).$$

Nimmt man für n und q beliebige Zahlen, so hat man nur die rechts entstehende Zahl beliebig in Faktoren zu zerlegen und den einen Faktor $= m + p$, den andern gleich $m - p$ zu setzen, damit auch m und p rational werden. Es genügen z. B. für m, n, p, q bezw. 1) 4, 2, 1, 1; 2) 8, 2, 7, 1; 3) 7, 3, 3, 1. Setzt man diese Werte und die bei (28) angegebenen in (13), so erhält man:

$$\frac{18a + 47b - 2x}{7a + 18b - 3x} = \frac{7a + 18b - 3x}{3a + 7b - 2x}$$

$$(29)\quad \frac{42a + 103b + 22x}{33a + 77b + 23x} = \frac{33a + 77b + 23x}{27a + 58b + 22x}$$

$$\frac{47a + 123b + 2x}{18a + 47b + 3x} = \frac{18a + 47b + 3x}{7a + 18b + 2x}.$$

Hieraus, wenn man zur Bildung des dritten gleichwertigen Quotienten jedesmal nur den KS. mit Addition anwendet, die Gleichungen:

48. $\left(\frac{5a + 13b - x}{2a + 5b - x}\right)^2 = \frac{18a + 47b - 2x}{3a + 7b - 2x}$

49. $\left(\frac{5a + 12b + 3x}{4a + 9b + 3x}\right)^2 = \frac{42a + 103b + 22x}{27a + 58b + 22x}$

50. $\left(\frac{13a + 34b + x}{5a + 13b + x}\right)^2 = \frac{47a + 123b + 2x}{7a + 18b + 2x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}.$

d. Da man nach Ii. auch alle vollständigen quadratischen Gleichungen auf die in I. behandelte oder oben in (8) angegebene Form bringen kann, so mufs man sie auch auf die hier verlangte Form bringen können.

Nach 76 in I. heifst die allgemeine quadratische Gleichung, welche die Wurzeln a und b und die in I. behandelte Form hat, wenn man sie als Quotientengleichung schreibt:

$$(30)\quad \frac{m^2a + n^2b - (m^2 + n^2)x}{mpa + nqb - (mp + nq)x} = \frac{mpa + nqb - (mp + nq)x}{p^2a + q^2b - (p^2 + q^2)x}.$$

Soll die Gleichung für unsern Zweck brauchbar sein, so mufs

$$m^2 + n^2 = p^2 + q^2$$

werden. Wie diese Bedingung leicht zu erfüllen ist, ist oben bei 2) in c. gezeigt. Es genügen für m, n, p, q bezw. folgende Werte: 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 5, 3, 3, 5; 4) 7, 5, 5, 7; 5) 8, 1, 7, 4. Dann erhält man aus (30) zunächst:

$$(31)\quad \begin{aligned}
&1.\ \frac{4a + b - 5x}{2a + 2b - 4x} = \frac{2a + 2b - 4x}{4b + a - 5x} \\
&2.\ \frac{9a + b - 10x}{3a + 3b - 6x} = \frac{3a + 3b - 6x}{9b + a - 10x} \\
&3.\ \frac{25a + 9b - 34x}{15a + 15b - 30x} = \frac{15a + 15b - 30x}{25b + 9a - 34x} \\
&4.\ \frac{49a + 25b - 74x}{35a + 35b - 70x} = \frac{35a + 35b - 70x}{49b + 25a - 74x} \\
&5.\ \frac{64a + b - 65x}{56a + 4b - 60x} = \frac{56a + 4b - 60x}{49a + 16b - 65x}.
\end{aligned}$$

Hieraus, wenn man zur Bildung des dritten gleichwertigen Quotienten jedesmal nur den KS. mit Addition anwendet, entsprechend:

51. $\left(\frac{2a + b - 3x}{2b + a - 3x}\right)^2 = \frac{4a + b - 5x}{4b + a - 5x}$

52. $\left(\frac{3a + b - 4x}{3b + a - 4x}\right)^2 = \frac{9a + b - 10x}{9b + a - 10x}$

53. $\left(\frac{5a + 3b - 8x}{5b + 3a - 8x}\right)^2 = \frac{25a + 9b - 34x}{25b + 9a - 34x}$

54. $\left(\frac{7a + 5b - 12x}{7b + 5a - 12x}\right)^2 = \frac{49a + 25b - 74x}{49b + 25a - 74x}$

55. $\left(\frac{24a + b - 25x}{21a + 4b - 25x}\right)^2 = \frac{64a + b - 65x}{49a + 16b - 65x}$

L. $x = a, b$.

Wendet man zur Bildung des dritten gleichwertigen Quotienten den KS. mit Subtraktion an, so erhält man aus 3. und 4. in (31):

56. $\left(\frac{2x - 5a + 3b}{2x - 5b + 3a}\right)^2 = \frac{25a + 9b - 34x}{25b + 9a - 34x}$ [s. 121]

57. $\left(\frac{2x - 7a + 5b}{2x - 7b + 5a}\right)^2 = \frac{49a + 25b - 74x}{49b + 25a - 74x}$ [s. 121_1]

L. $x = a, b$.

Will man quadratische Gleichungen in dieser Form mit andern Wurzeln haben, so kann man in den aufgestellten Gleichungen 51—57 nur diese Wurzeln statt a und b setzen, oder man entwickelt die betreffenden quadratischen Gleichungen und bildet aus diesen zunächst Gleichungen von der in I. behandelten Form, in welchen die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren einander gleich sind. Wie man dann weiter verfährt, ist oben genugsam gezeigt.

VIII. $\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{C}{D}$.

34. $\frac{17a + b - x}{17b + a - x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 17b + x}{b + 17a + x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

34_1. $\frac{3a + b - x}{3b + a + x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 3b - x}{b + 3a + x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$.

34_2. $\frac{5a + b + x}{5b + a + x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 5b - x}{b + 5a - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

34_3. $\frac{x + a - b}{x - a - b} = \left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2 \cdot \frac{x + a + b}{x - a + b}$

L. $x = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

34_4. $\frac{4x + 4a + b}{4x + 4b + a} = \left(\frac{4a - b}{4b - a}\right)^2 \cdot \frac{a + 4b - 4x}{b + 4a - 4x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

$34_5.$ $\frac{14x - 2a + 13b}{14x - 2b + 13a} = \left(\frac{8a - 3b}{8b - 3a}\right)^2 \cdot \frac{14x - 13a + 2b}{14x - 13b + 2a}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

$34_6.$ $\frac{13x - 37a + 19b}{13x + 37b - 19a} = \left(\frac{5a + 2b}{5b + 2a}\right)^2 \cdot \frac{13x + 19a - 37b}{13x - 19b + 37a}$

L. $x = \sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$.

a. Die Gleichungen haben die Form

(1) $\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{C}{D}$, oder

(2) $\frac{A}{B} = \left(\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\right)^2 \cdot \frac{C}{D}$.

Sie unterscheiden sich von den in V. und VII. behandelten Gleichungen dadurch, dafs der rechts stehende konstante Faktor im Quadrat steht anstatt in der ersten Potenz. Den eigentlichen Schlüssel zu der Aufstellung dieser Gleichungen liefern ebenfalls die symmetrischen Gleichungen des 4. Grades. Jede symmetrische Gleichung des 4. Grades von der Form, wie sie in V. aufgestellt sind, also von der Form

(3) $\frac{(\alpha x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha y^2)(x + y)^2}{(\beta x^2 + 2\beta_1 xy + \beta y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}$

liefert eine Gleichung, aber nur eine von der hier verlangten Form, welche rechts als konstanten Faktor das Quadrat von $\frac{a}{b}$ hat, also von der Form 34—34_2 ist.

Setzt man die 11. und 13. Darstellung von t bei (6) in V. einander gleich und x statt r, so erhält man die Gleichung 34.

Setzt man die 7. und 9. Darstellung von t zu (18) in V. einander gleich, x statt r und $-b$ statt b, so erhält man 34_1.

Setzt man die 9. und 11. Darstellung von t bei (10) in V. einander gleich und x statt r, so erhält man 34_2.

Ebenso erhält man aus der 11. und 13. Darstellung von t bei (8) und bei (17) in V. bezw.

1. $\frac{7a - 9b + 3x}{7b - 9a + 3x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{9a - 7b + 3x}{9b - 7a + 3x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

2. $\dfrac{41a + 9b - 3x}{41b + 9a - 3x} = \dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{9a + 41b + 3x}{9b + 41a + 3x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 + 82ab + 9b^2}$.

Soll rechts als konstanter Faktor das Quadrat eines andern Quotienten als $\frac{a}{b}$ stehen, so mufs man in der betreffenden symmetrischen Gleichung des 4. Grades, also in (3) diesen Quotienten statt $\frac{a}{b}$ setzen. Dann stehen die Koefficienten α, α_1, β und β_1 zur Verfügung, um dem Resultate eine geeignete Form zu geben.

Soll z. B. rechts in der quadratischen Gleichung als konstanter Faktor

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

stehen, so hat man statt (3) zu setzen

$$(4) \quad \frac{(\alpha x^2 + 2\alpha_1 xy + \alpha y^2)(x+y)^2}{(\beta x^2 + 2\beta_1 xy + \beta y^2)(x-y)^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Entwickelt man hieraus die Darstellungen von t, so mufs man nach (12) in Vc. auf

$$r^2 = (\beta + \beta_1)^2(a+b)^2 + 2(\alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1)(a^2 - b^2) \\ + (\alpha - \alpha_1)^2(a-b)^2$$

kommen, und dies r wird schliefslich die Lösung der aufzustellenden Gleichungen. Nach VI d. kann man in diesem Falle

$$r = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

erhalten. Dann ist

$$(5) \quad \left| \begin{array}{c} \beta + \beta_1 = 1, \quad \alpha - \alpha_1 = 1 \\ \alpha\beta - 3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta - \alpha_1\beta_1 = 0 \end{array} \right|$$

zu setzen. Diese Gleichungen werden am einfachsten erfüllt durch

$$\alpha = \tfrac{3}{4}, \quad \alpha_1 = -\tfrac{1}{4}, \quad \beta = 1, \quad \beta_1 = 0.$$

Dann geht (4) über in

$$(6) \quad \frac{(3x^2 - 2xy + 3y^2)(x+y)^2}{4(x^2 + y^2)(x-y)^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Hieraus erhält man als Darstellungen von t:

1. $\sqrt{\frac{2a+4b+r}{a-3b+r}}$ 2. $\sqrt{\frac{2a-r}{r-a-b}}$

3. $\sqrt{\frac{2(a+b)}{r-2b}}$ 4. $\sqrt{\frac{r+2b}{a-b}}$ 5. $\sqrt[4]{\frac{2(r-a+b)}{r-a-b}}$

6. $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{2r+4b}{r-2b}}$ 7. $\sqrt[4]{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\cdot\frac{2(r+a+b)}{r+a-b}}$

$$r = \sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Setzt man die 5. und 7. Darstellung einander gleich und [illegible] x statt r, so erhält man die Gleichung 34_3.

In ähnlicher Weise könnte man zu den Gleichungen 34_4—34_6 gelangen. Aber der Weg ist umständlich.

Ist der konstante Faktor nicht gegeben oder vorher [illegible] bestimmt, sondern willkürlich, so kann man immer aus den Darstellungen von t, welche zu einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades gehören, eine Gleichung bilden, welche von der hier verlangten Form ist.

Bei (11) in I. sind nur 5 Darstellungen von t angegeben, unter welchen eine für t_4 ist. Bei (6), (8) und (17) in V. sind je 13 Darstellungen von t angegeben, unter welchen jedesmal 3 Darstellungen von t_4 sind. Setzt man die erste und dritte Darstellung von t_4 einander gleich und x statt r, so kommt man auf Gleichungen von der hier verlangten Form. Wie diese Darstellungen von t_4 gefunden werden, ist in Ec. und bei [II. 236] angegeben, auch oben bei (10) in V. angedeutet. Sucht man daher bei (11) in I. noch die dritte Darstellung von t_4, so mufs sich die verlangte Gleichung leicht ergeben. Man erhält als dritte Darstellung von t_4

$$t_4 = \sqrt[4]{\left(\frac{4a+3b}{4a-3b}\right)^2\cdot\frac{5r+3a+4b}{5r+3a-4b}}.$$

Setzt man die bei (11) in I. angegebene Darstellung von t_4 gleich der hier gefundenen und x statt r, so erhält man endlich

3. $$\frac{5x-3a+4b}{5x-3a-4b} = \left(\frac{4a+3b}{4a-3b}\right)^2\cdot\frac{5x+3a+4b}{5x+3a-4b}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Sucht man in ähnlicher Weise zu den Darstellungen von t bei (7) in I. die 3. Darstellung von t_4, so erhält man

$$t_4 = \sqrt[4]{\left(\frac{12a - 5b}{12a + 5b}\right)^2 \cdot \frac{13r - 5a + 12b}{13r - 5a - 12b}}.$$

Setzt man die Darstellung von t_4 bei (7) in I. gleich der gefundenen und x statt r, so erhält man

4. $$\frac{13x + 5a + 12b}{13x + 5a - 12b} = \left(\frac{12a - 5b}{12a + 5b}\right)^2 \cdot \frac{13x - 5a + 12b}{13x - 5a - 12b}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dies Verfahren, Gleichungen von der hier verlangten Form aufzustellen, ist dann sehr einfach, wenn für eine gröfsere Anzahl von symmetrischen Gleichungen des vierten Grades die Darstellungen der zugehörigen t, besonders diejenigen von t_4 entwickelt und über die Lösung und den konstanten Faktor keine besonderen Bedingungen gestellt sind. Soll man jedoch zu diesem Zwecke erst die betreffenden Darstellungen von t entwickeln, so ist das Verfahren auch dann noch umständlich, wenn man in der Entwickelung der Darstellungen von t vielfach geübt ist, und besonders in allen Fällen, in welchen der konstante Faktor ein anderer ist als $\frac{a}{b}$.

b. Will man Gleichungen von der hier verlangten Form direkt aufstellen, so mufs man, wie es in VIe. geschehen ist, zwei Fälle unterscheiden: 1) der konstante Faktor ist gegeben; 2) die Lösung ist gegeben. Wir wollen zunächst den ersten Fall vornehmen und haben daher die Aufgabe:

> Wie stellt man Gleichungen von der oben stehenden Form direkt auf, wenn der konstante Faktor gegeben ist?

Am einfachsten erhält man in diesem Falle Gleichungen von der hier verlangten Form durch ähnliche Betrachtungen, wie sie in Va. angestellt sind.

Die Gleichungen $34 - 34_2$ haben die Form

$$(7) \quad \frac{\alpha a + \beta b + x}{\alpha b + \beta a + x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\beta a + \alpha b - x}{\beta b + \alpha a - x}.$$

$$\text{VIII b.}\quad \frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{C}{D}.$$

Nenner und Zähler sind in Bezug auf a und b symmetrisch. Aus (7) folgt

$$\frac{(\alpha a + \beta b)^2 - x^2}{(\alpha b + \beta a)^2 - x^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Daher durch korr. Subtraktion

$$\frac{(\alpha a + \beta b)^2 - x^2}{(\alpha a + \beta b)^2 - (\alpha b + \beta a)^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{(\alpha a + \beta b)^2 - x^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(a^2 - b^2)} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

$$x^2 = (\alpha a + \beta b)^2 - (\alpha^2 - \beta^2)a^2$$

$$(8)\quad x = \sqrt{\beta^2 a^2 + 2\alpha\beta ab + \beta^2 b^2}.$$

Die Formel (8) giebt alle Lösungen, welche bei Gleichungen von der hier verlangten Form möglich sind, wenn der quadratische Faktor $\frac{a^2}{b^2}$ sein soll. Vorausgesetzt ist dabei freilich, dafs die Gleichung, wie in (7) angenommen, nach a und b symmetrisch ist. Das ist jedoch eine Voraussetzung, die nicht notwendig ist. Die allgemeine Form für alle Lösungen, welche bei Gröfsen von der hier verlangten Form für einen bestimmten quadratischen konstanten Faktor möglich sind, ist keine andere als die, welche bei Gleichungen von der in V und VII verlangten Form für den einfachen konstanten Faktor möglich sind. Nach 74 in Vk. mufs daher hier für den quadratischen Faktor $\frac{a^2}{b^2}$ die Lösung die Form

$$x = \sqrt{\mu^2 a^2 + 2\varrho ab + \nu^2 b^2}$$

haben, eine Form, welche allgemeiner ist als die in (8) angegebene.

Soll nun die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$$

werden, so hat man nach (8) $\beta = 1$, $\alpha = 17$ zu setzen, und die Gleichung (7) geht über in die Gleichung 34.

Setzt man $\beta = 1$, $\alpha = 3$, so mufs nach (8)

$$x = \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$$

die Lösung werden, und aus der Gleichung (7) entsteht die Gleichung 34_1.

Setzt man $\alpha = 5$, $\beta = 1$, so geht (7) über in 34_2.

Setzt man weiter in (7) für β und α bezw. 1) 1, 2; 2) 1, 4; 3) 1, 7, so erhält man:

5. $$\frac{2a + b - x}{2b + a - x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 2b + x}{b + 2a + x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 4ab + b^2}$.

3. $$\frac{4a + b - x}{4b + a - x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 4b + x}{b + 4a + x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 8ab + b^2}$.

7. $$\frac{7a + b - x}{7b + a - x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 7b + x}{b + 7a + x} \quad \text{u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

Soll die Gleichung 34_3 auf diesem Wege entwickelt werden, so mufs nach (8) die Lösung werden

$$(9) \quad x = \sqrt{\beta^2(a + b)^2 + 2\alpha\beta(a^2 - b^2) + \beta^2(a - b)^2}.$$

Diese Formel giebt alle Lösungen, welche bei Gleichungen von der hier verlangten Form möglich sind, wenn der quadratische Faktor $\left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2$ sein soll und die Gleichung nach a und b symmetrisch vorausgesetzt wird. Macht man diese Voraussetzung nicht, so sind für diesen Fall alle Lösungen in der Formel (18) enthalten, welche in VIe. für den einfachen konstanten Faktor $\frac{a + b}{a - b}$ aufgestellt ist.

Soll die Lösung (9) mit der bei 34_3 angegebenen übereinstimmen, so mufs man $\alpha = 0$ und am einfachsten $\beta = 1$ setzen. Dann erhält man aus (7), indem man hier $a + b$ statt a, $a - b$ statt b setzt,

$$\frac{a - b + x}{a + b + x} = \left(\frac{a + b}{a - b}\right)^2 \cdot \frac{a + b - x}{a - b - x},$$

d. h. die Gleichung 34_3.

Will man auf diesem Wege zur Gleichung 34_4 gelangen, so hat man $4a - b$ statt a, $4b - a$ statt b zu setzen. Dann wird nach (8) die Lösung

$$(10)\quad x = \sqrt{\beta^2(4a-b)^2 + 2\alpha\beta(4a-b)(4b-a) + \beta^2(4b-a)^2}.$$

Soll dieselbe mit der bei 34_4 angegebenen übereinstimmen, so muſs

$$16\beta^2 - 8\alpha\beta + \beta^2 = 0$$

werden. Man wird also am einfachsten

$$\beta = 8, \quad \alpha = 17$$

setzen. Dann geht, wenn man $4a - b$ statt a, $4b - a$ statt b und zugleich $60x$ statt x setzt, die Gleichung (7) über in 34_4.

Macht man in (7) für a und b dieselben Substitutionen und setzt zugleich $\alpha = 2$, $\beta = 1$, so erhält man

$$8.\quad \frac{7a + 2b + x}{7b + 2a + x} = \left(\frac{4a - b}{4b - a}\right)^2 \cdot \frac{2a + 7b - x}{2b + 7a - x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 52ab + b^2}$.

Um auf die Gleichung 34_5 zu kommen, hat man in (7) $8a - 3b$ statt a, $8b - 3a$ statt b zu setzen. Für diese Werte erhält man aus (8) zunächst

$$x = \sqrt{(73\beta^2 - 48\alpha\beta)(a^2 + b^2) + 2(73\alpha\beta - 48\beta^2)ab}.$$

Man erlangt das gewünschte Resultat, wenn man

$$73\beta^2 - 48\alpha\beta = -2(73\alpha\beta - 48\beta^2), \text{ d. h.}$$

$$\alpha = 23, \quad \beta = 98$$

setzt. Setzt man dann zugleich noch $770x$ statt x, so geht die Gleichung (7) über in die Gleichung 34_5.

Um die Gleichung 34_6 auf diesem Wege zu erhalten, muſs man $5a + 2b$ statt a, $5b + 2a$ statt b setzen. Man kommt dann auf $223\beta + 169\alpha = 0$, kann also $\alpha = 223$, $\beta = -169$ setzen. Setzt man dann noch weiter $273x$ statt x, so entsteht aus (7) die Gleichung 34_6.

Soll rechts ein anderer quadratischer Faktor stehen, als oben in den Gleichungen angegeben ist, so bleibt das Verfahren dasselbe. Man nimmt den quadratischen Faktor beliebig an und hat dann noch über die Form der Lösung zu verfügen.

Es sei der quadratische Faktor

$$\left(\frac{2a-b}{2b-a}\right)^2.$$

Dann ist in (7) und (8) $2a - b$ statt a, $2b - a$ statt b zu setzen. Aus (8) hat man zunächst

$$x = \sqrt{\beta^2(2a-b)^2 + 2\alpha\beta(2a-b)(2b-a) + \beta^2(2b-a)^2}, \text{ d. h.}$$

$$(11)\ x = \sqrt{(5\beta^2 - 4\alpha\beta)(a^2+b^2) + 2(5\alpha\beta - 4\beta^2)ab}.$$

Die Gröfsen α und β stehen noch zur Verfügung. Setzt man

$$1)\quad 5\beta^2 - 4\alpha\beta = 4\beta^2 - 5\alpha\beta, \text{ also}$$
$$\beta = -\alpha,\ \alpha = 1,\ \beta = -1,$$

so wird der Wert von x sehr einfach, und man erhält aus (7), wenn man zugleich $3x$ statt x setzt:

9. $\frac{a-b+x}{b-a+x} = \left(\frac{2a-b}{2b-a}\right)^2 \cdot \frac{x+a-b}{x-a+b}$

L. $x = \pm(a-b)$.

Die Gleichung bietet wenig Interesse, da man das Resultat erkennt, ohne die Gleichung aufzulösen. Da der erste und dritte Quotient einander gleich sind, so kann sie nur erfüllt werden durch:

$$1.\ a - b + x = 0,\quad 2.\ b - a + x = 0.$$

Es mufs in derselben Weise auch gelten

10. $\frac{a-b+x}{b-a+x} = \left(\frac{am+bn}{ap+bq}\right)^2 \cdot \frac{x+a-b}{x-a+b}$

L. $x = \pm(a-b)$.

Setzt man nach (11)

$$2)\quad 5\beta^2 - 4\alpha\beta = -2(5\alpha\beta - 4\beta^2), \text{ d. h.}$$
$$\alpha = 1,\ \beta = 2$$

und zugleich $2x$ statt x, so erhält man aus (7) und (11)

11. $\frac{2x+3b}{2x+3a} = \left(\frac{2a-b}{2b-a}\right)^2 \cdot \frac{3a-2x}{3b-2x}$

L. $x = \sqrt{3(a^2 - ab + b^2)}$.

c. Das in b. angegebene Verfahren, zu Gleichungen von der hier behandelten Form zu gelangen, hat erstens den

Mangel, dafs es nicht erschöpfend ist. Die Gleichung (7) wurde, abgesehen von dem quadratischen Faktor, nach a und b symmetrisch angenommen; die Gleichungen können auch unsymmetrisch sein und doch den gestellten Anforderungen genügen. Zweitens hat das Verfahren den Mangel, dafs es leicht zu unschönen Lösungen führt. Es ist daher zweckmäfsiger, die Lösung als gegeben anzunehmen. Wir haben demnach die in b. angedeutete zweite Aufgabe zu betrachten:

Wie stellt man Gleichungen von der oben voranstehenden Form direkt auf, wenn die Lösung im voraus gegeben ist?

In diesem Falle kann der quadratische konstante Faktor nicht mehr beliebig angenommen werden, vorausgesetzt, dafs alle Koefficienten rational sind. Der konstante Faktor mufs auch hier, wie in V. und VI. von der Lösung abhängen.

Wir können hier einen ähnlichen Weg einschlagen, wie der in b. angegebene. Die aufzustellende Gleichung mufs, da sie rein quadratisch sein soll, allgemein die Form haben

$$\frac{\alpha a + \beta b + \varepsilon x}{\alpha_1 a + \beta_1 b + \varepsilon_1 x} = \left(\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\right)^2 \cdot \frac{\alpha_1 a + \beta_1 b - \varepsilon_1 x}{\alpha a + \beta b - \varepsilon x}, \tag{12}$$

oder einfacher

$$\frac{(\alpha a + \beta b)^2 - \varepsilon^2 x^2}{(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 - \varepsilon_1{}^2 x^2} = \left(\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\right)^2. \tag{13}$$

Ist nun irgend eine Lösung gegeben, so hat man dieselbe hier einzusetzen und die griechischen Buchstaben so zu bestimmen, dafs die Gleichung identisch erfüllt wird.

Es möge

$$1)\quad x = \sqrt{ab}$$

als Lösung gegeben sein. Dann geht (13) über in

$$\frac{(\alpha a + \beta b)^2 - \varepsilon^2 ab}{(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 - \varepsilon_1{}^2 ab} = \left(\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\right)^2.$$

Diese Gleichung enthält 10 willkürliche Gröfsen, über welche man zu verfügen hat. Am einfachsten setzt man die Faktoren a^2, ab und b^2 in den Zählern und in den Nennern einander gleich. Das giebt

$$\begin{aligned} &\alpha^2 = \mu^2, \quad 2\alpha\beta - \varepsilon^2 = 2\mu\nu, \quad \beta^2 = \nu^2, \\ &\alpha_1{}^2 = \mu_1{}^2, \quad 2\alpha_1\beta_1 - \varepsilon_1{}^2 = 2\mu_1\nu_1, \quad \beta_1{}^2 = \nu_1{}^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Genau genommen sind wir hier schon zu weit gegangen. Zähler und Zähler, wie Nenner und Nenner sind nicht notwendiger Weise identisch; es kann ein Faktor t ausgefallen sein. Man hätte daher eigentlich $\alpha^2 = \mu^2 t$, $\alpha_1{}^2 = \mu_1{}^2 t$ u. s. w. setzen sollen. Da jedoch über die Koefficienten noch weiter keine Bestimmungen getroffen sind, so ist hier der Faktor nicht notwendig. Sollten sich irrationale Zahlen ergeben, so kann man den Faktor leicht wieder hinzufügen. — Aus (14) ergiebt sich

$$(15) \quad \alpha\beta = - \mu\nu, \quad \alpha_1\beta_1 = - \mu_1\nu_1.$$

Das negative Zeichen mufs stehen; sonst müfsten ε und ε_1 gleich 0 werden. Dann ist aber

$$(16) \quad 4\mu\nu = - \varepsilon^2, \quad 4\mu_1\nu_1 = - \varepsilon_1{}^2.$$

Vorausgesetzt, dafs μ und ν, wie μ_1 und ν_1 keine gemeinschaftliche Faktoren haben, müssen wir aus (16) schliefsen: μ und ν, wie μ_1 und ν_1 müssen Quadrate mit entgegengesetzten Zeichen sein. Wir sind also hier auf einem ganz andern Wege für den quadratischen Faktor zu demselben Resultate gelangt, zu welchem wir oben in VIf. bei 1) in (31) für den einfachen Faktor gelangt sind.

Die konstanten Faktoren können daher z. B. sein:

$$1.\ \frac{4a-b}{4b-a} \qquad 2.\ \frac{9a-b}{9b-a} \qquad 3.\ \frac{9a-4b}{9b-4a} \qquad 4.\ \frac{4a-b}{9b-4a}.$$

Im 1. Fall ist $\mu = 4$, $\nu = -1$, $\mu_1 = -1$, $\nu_1 = 4$, mithin wegen (14) und (15): $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 4$, $\varepsilon = 4$, $\varepsilon_1 = 4$. Daher geht (12) über in

12. $$\frac{4a+b+4x}{4b+a+4x} = \left(\frac{4a-b}{4b-a}\right)^2 \cdot \frac{a+4b-4x}{b+4a-4x}$$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Man erhält für die drei andern konstanten Faktoren auf demselben Wege bezw. die folgenden Gleichungen:

13. $$\frac{9a+b+6x}{9b+a+6x} = \left(\frac{9a-b}{9b-a}\right)^2 \cdot \frac{a+9b-6x}{b+9a-6x}$$

14. $\frac{9a + 4b + 12x}{9b + 4a + 12x} = \left(\frac{9a - 4b}{9b - 4a}\right)^2 \cdot \frac{4a + 9b - 12x}{4b + 9a - 12x}$

15. $\frac{4a + b + 4x}{4a + 9b + 12x} = \left(\frac{4a - b}{9b - 4a}\right)^2 \cdot \frac{4a + 9b - 12x}{4a + b - 4x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Soll die Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

sein, hat man nach (13)

$$\frac{(\alpha a + \beta b)^2 - \varepsilon^2(a^2 + b^2)}{(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 - \varepsilon_1{}^2(a^2 + b^2)} = \left(\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\right)^2.$$

Man mufs links im Zähler und Nenner die Zeichen umkehren; sonst kommt man auf $\mu^2 + \nu^2 = -\varepsilon^2$. Dann erhält man:

$$\varepsilon^2 - \alpha^2 = \mu^2, \quad \alpha\beta = -\mu\nu, \quad \varepsilon^2 - \beta^2 = \nu^2.$$

Zunächst findet man

$$\alpha^2 + \beta^2 = \mu^2 + \nu^2 = \varepsilon^2,$$
$$\alpha = \pm \nu, \quad \beta = \mp \mu.$$

Man hat daher nur zwei Zahlen α und β zu suchen, deren Quadrate zusammen wieder ein Quadrat sind. Es mufs also

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

rational werden. Dasselbe gilt dann für μ und ν. Wir sind daher hier zu demselben Resultate für den quadratischen konstanten Faktor gekommen, zu dem wir in VIf. bei 2) in (34) für den einfachen konstanten Faktor gelangt sind; denn dort sind die Koefficienten von a und b bezw. 1) $m^2 - n^2$ und $2mn$; 2) $p^2 - q^2$ und $-2pq$. Es ist aber $(m^2 - n^2)^2 + (-2mn)^2 = (m^2 + n)^2$ und $(p^2 - q^2)^2 + (-2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$, d. h. die Summen der Quadrate der Koefficienten sind wieder Quadrate.

Setzt man daher 1) $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 3$, also $\mu = 4$, $\nu = -3$, $\mu_1 = -3$, $\nu_1 = 4$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 5$; 2) $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = -4$, also $\mu = 4$, $\nu = -3$, $\mu_1 = 4$, $\nu_1 = 3$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 5$; 3) $\alpha = 5$, $\beta = 12$, $\alpha_1 = 12$, $\beta_1 = 5$, also $\mu = 12$, $\nu = -5$, $\mu_1 = -5$, $\nu_1 = 12$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 13$;

4) $\alpha = 15$, $\beta = -8$, $\alpha_1 = -8$, $\beta_1 = 15$, also $\mu = 8$, $\nu = 15$, $\mu_1 = 15$, $\nu_1 = 8$, $\varepsilon = \varepsilon_1 = 17$, so geht (12) bezw. über in:

16. $$\frac{3a + 4b + 5x}{3b + 4a + 5x} = \left(\frac{4a - 3b}{4b - 3a}\right)^2 \cdot \frac{4a + 3b - 5x}{4b + 3a - 5x}$$

17. $$\frac{3a + 4b + 5x}{3a - 4b + 5x} = \left(\frac{4a - 3b}{4a + 3b}\right)^2 \cdot \frac{3a - 4b - 5x}{3a + 4b - 5x}$$

18. $$\frac{5a + 12b + 13x}{5b + 12a + 13x} = \left(\frac{12a - 5b}{12b - 5a}\right)^2 \cdot \frac{12a + 5b - 13x}{12b + 5a - 13x}$$

19. $$\frac{15a - 8b + 17x}{15b - 8a + 17x} = \left(\frac{8a + 15b}{8b + 15a}\right)^2 \cdot \frac{8a - 15b + 17x}{8b - 15a + 17x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Es sei als Lösung

$$3) \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Hier sind α und β so zu bestimmen, dafs

$$\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

rational wird. Dann bestimmen sich die übrigen in (12) oder (13) vorkommenden Koefficienten von selbst. Setzt man daher 1) $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = -4$; 2) $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 3$; 3) $\alpha = 13$, $\beta = 5$, $\alpha_1 = 13$, $\beta_1 = 12$; 4) $\alpha = 25$, $\beta = 7$, $\alpha_1 = 25$, $\beta_1 = 24$ und bestimmt die übrigen Koefficienten demgemäfs, so erhält man aus (12):

20. $$\frac{5a + 4b + 3x}{5a - 4b + 3x} = \left(\frac{4a + 5b}{4a - 5b}\right)^2 \cdot \frac{3x - 5a + 4b}{3x - 5a - 4b}$$

21. $$\frac{5a + 4b - 3x}{5a + 3b - 4x} = \left(\frac{4a + 5b}{3a + 5b}\right)^2 \cdot \frac{5a + 3b + 4x}{5a + 4b + 3x}$$

22. $$\frac{13a + 5b + 12x}{13a + 12b + 5x} = \left(\frac{5a + 13b}{12a + 13b}\right)^2 \cdot \frac{13a + 12b - 5x}{13a + 5b - 12x}$$

23. $$\frac{25a - 7b + 24x}{25a - 24b + 7x} = \left(\frac{25b - 7a}{25b - 24a}\right)^2 \cdot \frac{7x - 25a + 24b}{24x - 25a + 7b}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Bei der in 2) gegebenen Lösung ist

$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Bei der in 3) gegebenen Lösung hat man

$$x^2 = a^2 - b^2, \text{ d. h. } a^2 = x^2 + b^2.$$

Die durch die Lösungen gegebenen Gleichungen gehen in einander über, wenn man a und x vertauscht. Vertauscht man daher in den Gleichungen 16—19 a mit x, so mufs die Lösung 3) den Gleichungen genügen; vertauscht man in den Gleichungen 20—23 a mit x, so mufs die Lösung 2) genügen.

So erhält man aus 16—19 bezw.

24. $\frac{5a + 4b + 3x}{5a + 3b + 4x} = \left(\frac{4x - 3b}{4b - 3x}\right)^2 \cdot \frac{4x - 5a + 3b}{3x - 5a + 4b}$

L. $x = \pm b, \sqrt{a^2 - b^2}$.

25. $\frac{5a + 4b + 3x}{5a - 4b + 3x} = \left(\frac{4x - 3b}{4x + 3b}\right)^2 \cdot \frac{3x - 5a - 4b}{3x - 5a + 4b}$

L. $x = 0, \infty, \sqrt{a^2 - b^2}$.

26. $\frac{13a + 12b + 5x}{13a + 5b + 12x} = \left(\frac{12x - 5b}{12b - 5x}\right)^2 \cdot \frac{12x - 13a + 5b}{5x - 13a + 12b}$

L. $x = \pm b, \sqrt{a^2 - b^2}$.

27. $\frac{17a - 8b + 15x}{17a + 15b - 8x} = \left(\frac{8x + 15b}{8b + 15x}\right)^2 \cdot \frac{17a - 15b + 8x}{17a + 8b - 15x}$

L. $x = \pm b, \sqrt{a^2 - b^2}$.

In derselben Weise erhält man aus 20—23 bezw.

28. $\frac{5x + 3a + 4b}{5x + 3a - 4b} = \left(\frac{4x + 5b}{4x - 5b}\right)^2 \cdot \frac{3a + 4b - 5x}{3a - 4b - 5x}$

L. $x = 0, \infty, \sqrt{a^2 + b^2}$.

29. $\frac{5x + 3a + 4b}{5x + 4a + 3b} = \left(\frac{4x + 5b}{3x + 5b}\right)^2 \cdot \frac{5x + 4a + 3b}{5x + 3a + 4b}$

L. $x = -\frac{5}{7} b, -\frac{7}{5} b, \sqrt{a^2 + b^2}$.

30. $\frac{13x + 12a + 5b}{13x + 12b + 5a} = \left(\frac{5x + 13b}{12x + 13b}\right)^2 \cdot \frac{13x - 5a + 12b}{13x + 5b - 12a}$

L. $x = -\frac{13}{17} b, -\frac{17}{13} b, \sqrt{a^2 + b^2}$.

31. $\frac{25x + 24a - 7b}{25x - 24b + 7a} = \left(\frac{25b - 7x}{25b - 24x}\right)^2 \cdot \frac{7a + 24b - 25x}{7b + 24a - 25x}$

L. $x = \frac{25}{31} b, \frac{31}{25} b. \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Gleichungen gehören nicht ganz in diesen Abschnitt: 1) der quadratische Faktor enthält auch x, ist nicht konstant; 2) diese Gleichungen sind alle vom 4. Grade. — Die Auflösung derselben ist sehr einfach. Man mufs den dritten Quotienten nach links bringen und entwickeln. Aus den beiden so erhaltenen Quotienten bildet man nach dem KS. durch Addition oder Subtraktion in der Art einen dritten gleichwertigen Quotienten, dafs die Glieder mit x fortfallen, also nur Glieder mit x^2 und ohne x bleiben. Auf diesem Wege erhält man z. B. aus 29

$$\frac{25x^2 + 40bx + 16b^2 - 9a^2}{25x^2 + 30bx + 9b^2 - 16a^2} = \frac{16x^2 + 40bx + 25b^2}{9x^2 + 30bx + 25b^2}.$$

Hieraus in der angegebenen Weise:

$$\frac{16x^2 + 40bx + 25b^2}{9x^2 + 30bx + 25b^2} = \frac{9(x^2 - b^2 - a^2)}{16(x^2 - b^2 - a^2)}.$$

Diese Gleichung zerfällt in:

$$1.\ x^2 - b^2 - a^2 = 0, \qquad 2.\ \frac{4x + 5b}{3x + 5b} = \pm \frac{3}{4} \text{ u. s. w.}$$

Die in 1), 2) und 3) gegebenen Lösungen waren sehr einfach. Bei weniger einfachen Lösungen ist es oft umständlich, für α und β solche Werte zu finden, welche die vorkommende Wurzel rational machen. Es möge, um dies an einem Beispiele zu zeigen, als Lösung

$$4) \quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben sein. Dann hat man aus der Gleichung (13), da man links, wie man leicht herausbringt, im Zähler und Nenner die Zeichen umkehren mufs,

$$\frac{\varepsilon^2(a^2 - ab + b^2) - (\alpha a + \beta b)^2}{\varepsilon_1^2(a^2 - ab + b^2) - (\alpha_1 a + \beta_1 b)^2} = \left(\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\right)^2.$$

Man kommt auf

$$3(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \tfrac{9}{4}\varepsilon^2.$$

Es sind also α und β so zu wählen, dafs

$$\sqrt{3(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}$$

rational wird. Man hat eine Diophantische Aufgabe zu lösen. Darin liegt das Umständliche bei diesem Verfahren. Es genügen 1) $\alpha = 1$, $\beta = 1$; 2) $\alpha = 2$, $\beta = -1$; 3) $\alpha = 13$, $\beta = -2$ u. s. w. Wählt man das letzte Wertepaar, so

VIIId. $\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{C}{D}$.

ird $\varepsilon = 14$, und man kann weiter setzen $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 13$, lso $\varepsilon_1 = 14$. Dann wird $\mu^2 = 3 \cdot 9$, $\nu^2 = 3 \cdot 64$, $\mu_1^2 = 3 \cdot 64$, $\nu_1^2 = 3 \cdot 9$. Man kann folglich, da es nur auf das Verhältnis dieser Gröſsen ankommt, $\mu = 3$, $\nu = -8$, $\mu_1 = 8$, $\nu_1 = -3$ setzen und erhält

$$\frac{14x - 13a + 2b}{14x + 13b - 2a} = \left(\frac{3a - 8b}{3b - 8a}\right)^2 \cdot \frac{14x - 13b + 2a}{14x + 13a - 2b} \quad [\text{s. } 34_5]$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

d. Das hier oben in c. mitgetheilte Verfahren zur Aufstellung der Gleichungen von der hier verlangten Form läſst [illegible] sich wesentlich vereinfachen, wenn man das benutzt, was in [illegible] VIf. über die Abhängigkeit des konstanten Faktors von de[illegible] Lösung gesagt ist. Ob der konstante Faktor quadratisch is[illegible] oder einfach, macht dabei keinen Unterschied. Für ein[illegible] bestimmte Lösung können in den hier aufzustellen[illegible] den Gleichungen nur solche quadratische Faktore[illegible] vorkommen, welche in der ersten Potenz für je[illegible] Lösung möglich sind. Wählt man daher für eine im vo[illegible] aus gegebene Lösung nach VIf. einen für die Lösung mö[illegible] lichen konstanten Faktor, so bleiben in der Gleichung (13) nur α, β, α_1, β_1, ε und ε_1 zu bestimmen, was dann leicht ist. Wir wollen das an einigen Beispielen durchführen.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$$

gegeben. Nach 8) in VIf. können hier die konstanten Faktoren vorkommen:

1. $\frac{8a + 3b}{8b + 3a}$ 2. $\frac{3a + b}{3b + a}$ 3. $\frac{7a - 3b}{7b - 3a}$ u. s. w.

Für den 1. Fall haben wir nach (13) mit Benutzun[g] der Lösung und des nunmehr bekannten konstanten Fakto[rs]

$$\frac{(\alpha a + \beta b)^2 - \varepsilon^2(a^2 + 3ab + b^2)}{(\alpha_1 a + \beta_1 b)^2 - \varepsilon_1^2(a^2 + 3ab + b^2)} = \left(\frac{8a + 3b}{8b + 3a}\right)^2.$$

Da wir hier schon über die Koefficienten μ, ν, μ_1 [illegible] fügt haben, so können wir nicht ohne Weiteres Z[ähler und] Nenner identisch setzen es oben in c. geschehen ist, sondern müssen links oder rechts den Proportionalitätsfaktor hinzufügen. Multipliciren wir rechts im Zähler und Nenner mit t, das vorläufig noch unbekannt ist, so erhalten wir für den Zähler die Gleichungen:

$$(17)\quad \left|\begin{aligned} \alpha^2 - \varepsilon^2 &= 64t \\ \beta^2 - \varepsilon^2 &= 9t \\ 2\alpha\beta - 3\varepsilon^2 &= 48t \end{aligned}\right|$$

$$\alpha^2 = 64t + \varepsilon^2, \qquad \beta^2 = 9t + \varepsilon^2, \qquad 2\alpha\beta = 48t + 3\varepsilon^2.$$

Hieraus ergiebt sich für ε die Gleichung

$$4(64t + \varepsilon^2)(9t + \varepsilon^2) = (48t + 3\varepsilon^2)^2$$

$$\varepsilon^2 = \tfrac{4}{5}t.$$

Man hat daher am einfachsten $t = 5$ zu setzen. Dann erhält man:

$$\varepsilon = \pm 2, \qquad \alpha = \pm 18, \qquad \beta = \pm 7.$$

Die Koefficienten α und β müssen gleiche Zeichen haben, da $\alpha\beta$, wie aus der dritten Gleichung in (17) folgt, für $t = 5$ positiv ist. Ebenso erhält man:

$$\varepsilon_1 = \pm 2, \qquad \alpha_1 = \pm 7, \qquad \beta_1 = \pm 18.$$

Daher nach (12) die Gleichung

32. $\frac{18a + 7b + 2x}{18b + 7a + 2x} = \left(\frac{8a + 3b}{8b + 3a}\right)^2 \cdot \frac{7a + 18b - 2x}{7b + 18a - 2x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$.

Für den 2. und 3. Fall erhält man bezw. auf demselben Wege:

33. $\frac{7a + 3b + 2x}{7b + 3a + 2x} = \left(\frac{3a + b}{3b + a}\right)^2 \cdot \frac{3a + 7b - 2x}{3b + 7a - 2x}$

34. $\frac{27a + 23b + 22x}{27b + 23a + 22x} = \left(\frac{7a - 3b}{7b - 3a}\right)^2 \cdot \frac{23a + 27b - 22x}{23b + 27a - 22x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$.

Es sei als Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$$

gegeben. Nach 6) in VIf. können hier die konstanten Faktoren vorkommen:

1. $\frac{5a - 2b}{5b - 2a}$ 2. $\frac{10a - 7b}{10b - 7a}$ 3. $\frac{9a - 5b}{9b - 5a}$ u. s. w.

Im 1. Fall hat man

$$(\alpha a + \beta b)^2 - \varepsilon^2(9a^2 - 14ab + 9b^2) = (5a - 2b)^2 t.$$

Hieraus die Gleichungen

$$\alpha^2 - 9\varepsilon^2 = 25t, \qquad \beta^2 - 9\varepsilon^2 = 4t,$$
$$\alpha\beta + 7\varepsilon^2 = -10t.$$

Man findet zunächst $32\varepsilon^2 = -121t$ und hat daher

$$t = -32, \quad \varepsilon^2 = 121, \quad \varepsilon = 11.$$

Dann wird $\alpha\beta = -527$. Es müssen also also α und β [illegible] gleiche Zeichen haben. Man erhält $\alpha = 17$, $\beta = -$ [illegible] Das giebt, da sich dann α_1 und β_1 in umgekehrter We[illegible] bestimmen, die Gleichung

35. $\frac{17a - 31b + 11x}{17b - 31a + 11x} = \left(\frac{5a - 2b}{5b - 2a}\right)^2 \cdot \frac{31a - 17b + 11x}{31b - 17a + 11x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Auf demselben Wege findet man:

36. $\frac{7a - 41b + 19x}{7b - 41a + 19x} = \left(\frac{10a - 7b}{10b - 7a}\right)^2 \cdot \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$

37. $\frac{9a - 23b + 9x}{9b - 23a + 9x} = \left(\frac{9a - 5b}{9b - 5a}\right)^2 \cdot \frac{23a - 9b + 9x}{23b - 9a + 9x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Bei 36 kommt man auf $32\varepsilon^2 = -361t$, $t = -32$, $\varepsilon^2 = 361$; bei 37 auf $8\varepsilon^2 = -81t$, $t = -8$, $\varepsilon^2 = 81$ u. s. w. In beiden Fällen ist $\alpha\beta$ negativ.

e. Der in d. angegebene Weg ist wohl der einfachste, und doch sind die oben voranstehenden Gleichungen meistens nicht auf diesem Wege gebildet worden. Auch ist dieser Weg den zur Aufstellung der hier behandelten Gleichungen bisher angegebenen Methoden wenig entsprechend. Bei diesen ergaben sich die in den Gleichungen vorkommenden Koefficienten aus der Lösung selbst fast immer mit zwingender Notwendigkeit. Auch hier können wir die oben mehrfach angestellten Betrachtungen eingehender benutzen.

In VIf. ist gezeigt, wie man alle konstanten Faktoren findet, die für eine bestimmte Lösung in dort behandelten

Gleichungen vorkommen können. Es ist auch nachgewiesen, dafs es unendlich viele Gleichungen von der dort behandelten Form, wo der konstante Faktor in der ersten Potenz steht, giebt, welche alle dieselbe Lösung und denselben konstanten Faktor haben. Soll jedoch der konstante Faktor im Quadrat stehen, wie es bei den hier behandelten Gleichungen der Fall ist, so giebt es für eine bestimmte Lösung und einen bestimmten konstanten Faktor nur eine einzige Gleichung von dieser Form. Der den bisherigen Betrachtungen am meisten angemessene Weg ist daher, aus der Lösung Gleichungen von der in V. und VI. behandelten Form, in welchen der konstante Faktor in der ersten Potenz steht, abzuleiten, und aus diesen nach den bisher mehrfach angewendeten Methoden Gleichungen von der hier verlangten Form, in welchen der konstante Faktor im Quadrat steht. Man mufs da, wie es in VIf. geschehen ist, von den einfachen Quotientengleichungen ausgehen, die aus der Lösung abgeleitet sind.

Hat man nämlich eine einfache Quotientengleichung von der Form

$$(18) \quad X = \frac{A}{\mu_1 a + \nu_1 b} = \frac{\mu a + \nu b}{B},$$

wo X nur den Wert der Quotienten angeben soll, so hat man auch

$$(19) \quad X = \frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b} \cdot \frac{A}{\mu a + \nu b} = \frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b} \cdot \frac{\mu_1 a + \nu_1 b}{B}.$$

Bezeichnet man den konstanten Faktor mit f, so folgt nach dem KS. aus (18) und (19) bezw. allgemein:

$$(20) \quad X = \frac{Am + (\mu a + \nu b)n}{(\mu_1 a + \nu_1 b)m + Bn} = \frac{Am_1 + (\mu a + \nu b)n_1}{(\mu_1 a + \nu_1 b)m_1 + Bn_1}$$

$$(21) \quad X = f \cdot \frac{Ap + (\mu_1 a + \nu_1 b)q}{(\mu a + \nu b)p + Bq} = f \cdot \frac{Ap_1 + (\mu_1 a + \nu_1 b)q_1}{(\mu a + \nu b)p_1 + Bq_1}.$$

Setzt man der Übersicht halber einfache Buchstaben statt der zusammengesetzten Gröfsen, so hat man statt (20) und (21) bezw. die beiden Gleichungen:

(22) $X = N$

$$(23)\quad X = f\cdot\frac{P}{Q} = f\cdot\frac{P_1}{Q_1}.$$

Durch geeignete Bestimmung der willkürlichen Gröfsen
m_1, n_1, p, q, p_1 und q_1 kann man leicht

$$(24)\quad M_1 = N, \qquad P_1 = Q$$

chen. Dann ergiebt sich aber aus (22) und (23), indem
an aus jeder Gleichung durch Multiplikation der beiden
leichen Werte X^2 bestimmt, die Gleichung

$$(25)\quad \frac{M}{N_1} = f^2\cdot\frac{P}{Q_1},$$

welche von der verlangten Form ist. Das Verfahren ist ganz so, wie es oben in V g. bei 1) für die Lösung

$$x=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$$

und für den konstanten Faktor $\frac{a}{b}$ durchgeführt ist. Dort sind in (39) für X^2 drei Werte gefunden. Der zweite Wert hat für unsern Zweck keine Bedeutung. Aber aus der Gleichsetzung des ersten und dritten Wertes ergiebt sich die vorne angeführte Gleichung 34.

Es soll das Verfahren, was oben allgemein angedeutet ist, an einigen Beispielen durchgeführt werden.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x=\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

gegeben. Aus dieser Gleichung ist zunächst eine Quotientengleichung zu bilden, in welcher der Nenner links und der Zähler rechts kein x enthalten, wie es oben in VI e. und VI f. vielfach geschehen ist. Man kann bilden, wenn man den Wert der Quotienten mit X bezeichnet,

$$(26)\quad X = \frac{x+2b}{2(a-b)} = \frac{a+b}{x-2b}$$

$$(27)\quad X = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{x+2b}{2(a+b)} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a-b}{x-2b}.$$

Man hat daher nach dem KS., den Gleichungen (20) und (21) entsprechend, aus (26) und (27) bezw. allgemein:

$$(28)\quad \begin{cases} X = \dfrac{(x+2b)m + (a+b)n}{2(a-b)m + (x-2b)n} = \dfrac{(x+2b)m_1 + (a+b)n_1}{2(a-b)m_1 + (x-2b)n_1} \\ X = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{(x+2b)p + (a-b)q}{2(a+b)p + (x-2b)q} = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{(x+2b)p_1 + (a-b)q_1}{2(a+b)p_1 + (x-2b)q_1}. \end{cases}$$

Um die in (24) angegebenen Bedingungen zu erfüllen, ist zu setzen:

1) $2(a-b)m + (x-2b)n = (x+2b)m_1 + (a+b)n_1$, d. h.
$2m = n_1$, $-2(m+n) = 2m_1 + n_1$, $n = m_1$;

2) $2(a+b)p + (x-2b)q = (x+2b)p_1 + (a-b)q_1$ d. h.
$2p = q_1$, $2(p-q) = 2p_1 - q_1$, $q = p_1$.

Man findet leicht: 1) $m = 1$, $n = -1$, $m_1 = -1$, $n_1 = 2$; 2) $p = 1$, $q = 1$, $p_1 = 1$, $q_1 = 2$. Man kann jedesmal eine Gröfse willkürlich annehmen. Der erste Fall liefert $m = -n$, $n_1 = 2m$, $m_1 = 1$. Um möglichst kleine ganze Zahlen zu erhalten, mufs man $m = 1$ setzen u. s. w.

Durch die gefundenen Werte gehen die Gleichungen in (28) über in:

$$(29)\quad \begin{cases} X = \dfrac{x+b-a}{2a-x} = \dfrac{2a-x}{2(x-a-b)} \\ X = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{x+a+b}{x+2a} = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{x+2a}{2(x+a-b)}. \end{cases}$$

Bildet man durch Multiplikation der für X gefundenen Werte in jeder Gleichung X^2 und setzt die neuen Werte einander gleich, so erhält man

$$\frac{x+b-a}{x-a-b} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \cdot \frac{x+a+b}{x+a-b} \text{ [s. } 34_3],$$

eine Gleichung von der verlangten Form.

Es möge

$$2)\quad x = \sqrt{ab}$$

als Lösung gegeben sein. Dann hat man nach (32) in VI. zunächst die Quotientengleichung

$$\frac{3x-2a+2b}{4b-a} = \frac{4a-b}{3x+2a-2b},$$

und daher auch

$$\frac{4a-b}{4b-a} \cdot \frac{3x-2a+2b}{4a-b} = \frac{4a-b}{4b-a} \cdot \frac{4b-a}{3x+2a-2b}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind zunächst die allgemeinen Gleichungen zu bilden, welche den Gleichungen (28) entsprechen. Diese liefern, wenn die in (24) angegebenen Bedingungen erfüllt werden sollen,

$$m = 4, \quad n = 5, \quad m_1 = 5, \quad n_1 = 4$$
$$p = -4, \quad q = 5, \quad p_1 = 5, \quad q_1 = -4.$$

Die den Gleichungen (29) entsprechenden werden dann:

$$1. \quad \frac{4x + 4a + b}{5x + 2a + 2b} = \frac{5x + 2a + 2b}{4x + a + 4b}$$

$$2. \quad \frac{4a - b}{4b - a} \cdot \frac{a + 4b - 4x}{5x - 2a - 2b} = \frac{4a - b}{4b - a} \cdot \frac{5x - 2a - 2b}{4a + b - 4x}.$$

Daher die gesuchte Gleichung

$$\frac{4x + 4a + b}{4x + 4b + a} = \left(\frac{4a - b}{4b - a}\right)^2 \cdot \frac{a + 4b - 4x}{b + 4a - 4x} \text{ [s. } 34_4\text{].}$$

Um auf die Gleichung 34_5 zu kommen, ist als Lösung

$$3) \quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben. Dann kommt man nach (43) in VIf., indem man a — b statt b setzt, zunächst auf die Gleichung

$$\frac{5x + 7a - 7b}{8b - 3a} = \frac{8a - 3b}{5x - 7a + 7b}.$$

Hieraus sind die allgemeinen Gleichungen, welche denen in (28) entsprechen, zu bilden. Diese führen auf

$$m = 14, \quad n = -11, \quad m_1 = -11, \quad n_1 = 14$$
$$p = 14, \quad q = 11, \quad p_1 = 11, \quad p_1 = 14.$$

Die allgemeinen Gleichungen geben dann die beiden speciellen:

$$1. \quad \frac{14x + 2a - 13b}{7a + 7b - 11x} = \frac{7a + 7b - 11x}{14x - 13a + 2b}$$

$$2. \quad \frac{8a - 3b}{8b - 3a} \cdot \frac{14x + 13a - 2b}{11x + 7a + 7b} = \frac{8a - 3b}{8b - 3a} \cdot \frac{11x + 7a + 7b}{14x - 2a + 13b}.$$

Daher die gesuchte Gleichung

$$\frac{14x + 2a - 13b}{14x + 2b - 13a} = \left(\frac{8a - 3b}{8b - 3a}\right)^2 \cdot \frac{14x + 13a - 2b}{14x + 13b - 2a} \text{ [s. } 34_5\text{].}$$

Um endlich noch die Gleichung 34_6 auf diesem Wege zu bilden, mufs als Lösung

4) $x = \sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$

gegeben sein. Dann hat man nach (45) in VI f., wenn man dort $-b$ statt b setzt, zunächst die Quotientengleichung

$$\frac{13a + 13b + 3x}{4(5b + 2a)} = \frac{4(5a + 2b)}{13a + 13b - 3x}.$$

Bildet man hieraus die allgemeinen Gleichungen, so ergeben die beiden Bedingungen

$$m = 13, \quad n = -14, \quad m_1 = 14, \quad n_1 = -13,$$
$$p = 13, \quad q = -14, \quad p_1 = 14, \quad q_1 = -13.$$

So folgen aus den allgemeinen Gleichungen die speciellen:

1. $\frac{13x - 37a + 19b}{14x - 26a + 26b} = \frac{14x - 26a + 26b}{13x - 19a + 37b}$

2. $\frac{5a + 2b}{5b + 2a} \cdot \frac{13x + 19a - 37b}{14x + 26a - 26b} = \frac{5a + 2b}{5b + 2a} \cdot \frac{14x + 26a - 26b}{13x + 37a - 19b}$.

Daher die gesuchte Gleichung

$$\frac{13x - 37a + 19b}{13x + 37b - 19a} = \left(\frac{5a + 2b}{5b + 2a}\right)^2 \cdot \frac{13x + 19a - 37b}{13x - 19b + 37a}.$$

Ändert man das Zeichen von x, was nicht in Betracht kommt, so wird die Gleichung identisch mit 34_6.

Auf dem hier angegebenen Wege sind die meisten der Gleichungen 34—34_6 entstanden. Zugleich ergiebt sich hieraus, dafs die Gröfsen m, n, p, q u. s. w. ihre Willkürlichkeit einbüfsen und ganz bestimmte Werte haben müssen, sobald neben der Lösung auch der quadratische konstante Faktor festgestellt ist. Es giebt in diesem Falle, abgesehen davon, dafs man auch $-x$ statt x setzen kann, nur eine einzige Gleichung, welche den Anforderungen genügt.

Vollständige quadratische Gleichungen lassen sich nicht auf die hier verlangte Form bringen. Wie man z. B. in der Gleichung

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma x}{\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x} = \left(\frac{\mu a + \nu b}{\mu_1 a + \nu_1 b}\right)^2 \cdot \frac{\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 x}{\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 x}$$

auch die Koefficienten bestimmen mag, die Gleichung wird nie mit $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ identisch oder durch $x = a$ und $x = b$ erfüllt werden können. Bei den in V m. und VI h.

für vollständige quadratische Gleichungen aufgestellten Quotientengleichungen ist der hier in e. angegebene Weg nicht anwendbar; man kommt nur zu identischen Gleichungen.

IX. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$.

35. $\frac{x + 7a + b}{5x + 3a - 11b} \cdot \frac{x - a + b}{x - a + 17b} = \frac{x - 5a + b}{5x + 7a - 59b}$

L. $x = \sqrt{a^2 - 10ab + b^2}$.

35$_1$. $\frac{a + 3b + 4x}{b + 3a + 4x} \cdot \frac{3a + x}{3b + x} = \frac{a + x}{b + x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

35$_2$. $\frac{3a - 2x}{2x - a} \cdot \frac{3x - 2b}{2b - x} = \frac{9a + 4b - 12x}{a + 4b - 4x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

35$_3$. $\frac{4x - a + 5b}{4x - b + 5a} \cdot \frac{x + 2a + b}{x + 2b + a} = \frac{x + b}{x + a}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

35$_4$. $\frac{x + 2a + b}{x + 2a - b} \cdot \frac{3x + 3a + b}{3x + 3a - b} = \frac{x + a + b}{x + a - b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

35$_5$. $\frac{a + 3b + x}{2a + b - x} \cdot \frac{x + b}{x - a + b} = \frac{a + b + x}{a + b - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

35$_6$. $\frac{a + 2b + x}{a + 2b - x} \cdot \frac{3x + a - b}{3x - a + b} = \frac{a + b + x}{a + b - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

35$_7$. $\frac{3x + 4a - b}{3x + 4b - a} \cdot \frac{x + 2a}{x + 2b} = \frac{x + 2a - b}{x + 2b - a}$

L. $x = \sqrt{4a^2 - 7ab + 4b^2}$.

35$_8$. $\frac{3a - 2b + 3x}{3b - 2a + 3x} \cdot \frac{a + 2b + x}{b + 2a + x} = \frac{2a - b + 2x}{2b - a + 2x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

35_9. $\frac{3a + 2b + 3x}{3b + 2a - 3x} \cdot \frac{a + 2b - 2x}{b + 2a + 2x} = \frac{x + 2a - b}{x - 2b + a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

35_{10}. $\frac{4a - b + x}{4b - a + x} \cdot \frac{13a - b + x}{13b - a + x} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

a. Die vorstehenden Gleichungen haben die Form

$$(1) \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{E}{F}.$$

Den eigentlichen Schlüssel zur Aufstellung dieser Gleichungen liefern wiederum die symmetrischen Gleichungen des 4. Grades. Aus den Darstellungen von t, welche aus symmetrischen Gleichungen des 4. Grades abgeleitet sind, lassen sich leicht beliebig viele Gleichungen von der hier oben stehenden Form bilden. Man suche für die symmetrische Gleichung des 4. Grades nur t_4. Sind die Radikanden von zwei beliebigen t, welche durch Quadratwurzeln ausgedrückt sind, $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$, der Radikand von $t_4 = \frac{E}{F}$, so ist

1. $\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{C}{D}}$, also $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$,

2. $\frac{x+y}{x-y} = \sqrt[4]{\frac{E}{F}}$, also $\left(\frac{x+y}{x-x}\right)^4 = \frac{E}{F}$.

Daher aus 1. und 2. die Gleichung

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{E}{F}.$$

Dann ist nur x statt r zu setzen, und die Gleichung von der verlangten Form ist fertig. Nur hat man zu beachten, dafs die Gleichung nicht kubisch wird; es mufs sich x^3 fortheben. Multiplicirt man z. B. die 4. und 7. Darstellung von t bei (6) in V. mit einander und setzt das Produkt gleich dem Quadrat der 12. Darstellung und x statt r, so erhält man

1. $\frac{7a - b + x}{7b - a + x} \cdot \frac{a + 5b + x}{b + 5a + x} = \frac{a - b + x}{b - a + x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Um die 11. Darstellung von t bei (6) in V. anzuwenden, sind die vorhandenen, durch Quadratwurzeln ausgedrückten Darstellungen nicht ausreichend, oder man müfste das Produkt der 1. und 2. Darstellung nehmen. Dann würde man jedoch mehr auf eine Gleichung von der Form kommen, wie sie in V. behandelt sind, als auf eine Gleichung, wie sie hier verlangt werden. Aber man kann mit Hülfe des KS. aus der 1. und 2. Darstellung leicht zwei für unsern Zweck brauchbare Darstellungen bilden. Man hat, indem man x statt r setzt,

$$1.\ t^2 = \frac{a - b + x}{6b} = \frac{6a}{b - a + x}$$

$$2.\ t^4 = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}.$$

Aus den beiden ersten Quotienten erhält man, indem man erstens den ersten Quotienten mit einer beliebigen Zahl 2 erweitert und den KS. mit Addition anwendet, zweitens den zweiten mit derselben Zahl 2 erweitert und abermals den KS. mit Addition anwendet, die beiden neuen gleichwertigen Quotienten

$$t^2 = \frac{8a - 2b + 2x}{13b - a + x} = \frac{13a - b + x}{8b - 2a + 2x}.$$

Das Produkt dieser beiden Quotienten mufs $= t^4$ sein. Man hat daher

$$2.\ \frac{4a - b + x}{4b - a + x} \cdot \frac{13a - b + x}{13b - a + x} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x} \quad [\text{s. } 35_{10}].$$

Man kann hier jedoch ganz allgemeine Gleichungen bilden und aus diesen beliebig viele specielle Gleichungen ableiten. Aus den beiden ersten Darstellungen von t bei (6) in V.

$$(2) \quad 1.\ t = \sqrt{\frac{a - b + r}{6b}}, \quad 2.\ t = \sqrt{\frac{6a}{b - a + r}}$$

hat man nach dem KS., indem man erstens den ersten Radikanden mit m, den zweiten mit n erweitert, zweitens umgekehrt den ersten Radikanden mit n, den zweiten mit m und jedesmal den KS. mit Addition anwendet, allgemein

$$(3) \quad t = \sqrt{\frac{(a - b + r)m + 6an}{6bm + (b - a + r)n}} = \sqrt{\frac{(a - b + r)n + 6am}{6bn + (b - a + r)m}}.$$

Nach 11. bei (6) in V. ist hier auch

$$(4) \quad t = \sqrt[4]{\frac{17a + b - r}{17b + a - r}}.$$

Bildet man jetzt t^4 erstens aus dem Produkt der Darstellungen in (3), zweitens aus (4), setzt die für t^4 gefundenen Ausdrücke einander gleich und x statt r, so hat man allgemein

3. $$\frac{(a - b + x)m + 6an}{6bm + (b - a + x)n} \cdot \frac{(a - b + x)n + 6am}{6bn + (b - a + x)m} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Die Gleichung ist quadratisch, da sich x^3 fortheben mufs. — Setzt man $m = 2$, $n = 1$, so kommt man auf 2. oben oder [35_{10}]. Setzt man weiter 1) $m = 3$, $n = 1$; 2) $m = 3$, $n = 2$, so giebt das bezw.

4. $$\frac{3a - b + x}{3b - a + x} \cdot \frac{19a - b + x}{19b - a + x} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}$$

5. $$\frac{5a - b + x}{5b - a + x} \cdot \frac{10a - b + x}{10b - a + x} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Auch die 12. Darstellung von t bei (6) in V., welche schon oben zur Formirung der Gleichung 1 benutzt ist, läfst sich leicht zur Aufstellung einer allgemeinen Gleichung von der hier verlangten Form benutzen. Man hat aus (2)

$$(5) \quad t = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{a - b + r}{6a}} = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{6b}{b - a + r}}.$$

Daher allgemein

$$(6) \quad t = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{(a - b + r)m + 6bn}{6am + (b - a + r)n}}.$$

Die 12. Darstellung von t bei (6) in V. heifst

$$(7) \quad t = \sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{a - b + r}{b - a + r}}.$$

Aus der 2. Darstellung oben in (3), aus (6) und (7) ergiebt sich in der bekannten Weise, indem man den Faktor $\frac{a}{b}$ fortläfst, die allgemeine Gleichung

6. $\frac{(a-b+x)m+6bn}{6am+(b-a+x)n} \cdot \frac{(a-b+x)n+6am}{6bn+(b-a+x)m} = \frac{a-b+x}{b-a+x}$

L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Setzt man $m=1$, $n=1$, so erhält man 1. oben. Setzt man weiter 1) $m=2$, $n=1$; 2) $m=3$, $n=1$, so giebt das bezw.

7. $\frac{x+a+2b}{x-a+4b} \cdot \frac{x+13a-b}{x+11a+b} = \frac{x+a-b}{x-a+b}$

8. $\frac{x+a+b}{x-a+3b} \cdot \frac{x+19a-b}{x+17a+b} = \frac{x+a-b}{x-a+b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Die 13. Darstellung bei (6) in V. giebt nichts Besonderes. Ihre Benutzung führt auf die allgemeine Gleichung 3, wenn man hier $-x$ statt x setzt. Man hätte aus (5) zunächst zu bilden für t^2:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{(a-b+r)m+6bn}{6am+(b-a+r)n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{(a-b+r)n+6bm}{6an+(b-a+r)m} \text{ u. s. w.}$$

In derselben Weise, wie es hier mit den Darstellungen von t zu der symmetrischen Gleichung (5) in V. geschehen ist, kann man die Darstellungen von t bei jeder beliebigen symmetrischen Gleichung des 4. Grades zur Aufstellung von Gleichungen der hier verlangten Art benutzen. So sind für die symmetrische Gleichung des 4. Grades bei (7) in V. die zugehörigen Darstellungen von t bei (8) angegeben. Mit Benutzung der 11. Darstellung findet man hier auf dem oben gezeigten Wege die allgemeine Gleichung

9. $\frac{(3a-3b+x)m+2an}{2bm+(3b-3a+x)n} \cdot \frac{(3a-3b+x)n+2am}{2bn+(3b-3a+x)m} = \frac{7a-9b+3x}{7b-9a+3x}$

L. $x = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

Setzt man 1) $m=1$, $n=1$; 2) $m=2$, $n=1$; 3) $m=3$, $n=1$, so giebt das bezw.

10. $\left(\frac{5a-3b+x}{5b-3a+x}\right)^2 = \frac{7a-9b+3x}{7b-9a+3x}$

11. $\frac{4a-3b+x}{4b-3b+x} \cdot \frac{7a-3b+x}{7b-3a+x} = \frac{7a-9b+3x}{7b-9a+3x}$

12. $\frac{11a - 9b + 3x}{11b - 9a + 3x} \cdot \frac{9a - 3b + x}{9b - 3a + x} = \frac{7a - 9b + 3x}{7b - 9a + 3x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Mit Benutzung der 12. Darstellung kommt man auf dem oben angegebenen Wege auf die allgemeine Gleichung

13. $\frac{(3a - b + x)m + 2an}{2bm + (3b - 3a + x)n} \cdot \frac{(3a - 3b + x)n + 2bm}{2an + (3b - 3a + x)m} = \frac{3a - 3b + x}{3b - 3a + x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Setzt man hierin 1) $m = 1$, $n = 1$; 2) $m = 2$, $n = 1$; 3) $m = 3$, $n = 1$, so giebt das bezw.

14. $\frac{5a - 3b + x}{5b - 3a + x} \cdot \frac{3a - b + x}{3b - a + x} = \frac{3a - 3b + x}{3b - 3a + x}$

15. $\frac{4a - 3b + x}{7b - 3a + x} \cdot \frac{3a + b + x}{3b - 2a + x} = \frac{3a - 3b + x}{3b - 3a + x}$

16. $\frac{3x + 11a - 9b}{3x - 7a + 9b} \cdot \frac{x + 3a + 3b}{x - 3a + 9b} = \frac{x + 3a - 3b}{x + 3b - 3a}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Aus der 3., 7. und 10. Darstellung von t bei (10) in Vb. kann man hinschreiben

17. $\frac{7a - b + x}{3b - a + x} \cdot \frac{a + b + x}{5a + b + x} = \frac{a - b + x}{b - a + x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Aus der 3., 8. und 12. Darstellung von t bei (17) in Vc. kann man hinschreiben

18. $\frac{13a - 3b + x}{13b - 3a + x} \cdot \frac{3a + 7b + x}{3b + 7a + x} = \frac{3a - 3b + x}{3b - 3a + x}$

L. $q = \sqrt{9a^2 + 82ab + 9b^2}$.

Um mit den Darstellungen von t, welche zu einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades gehören, genau so verfahren zu können, wie es oben mehrfach durchgeführt ist, müssen für die Darstellungen von t zwei Bedingungen vorhanden sein: 1) die Koefficienten von r in t_{x+y} und in t_{x-y} müssen einander gleich sein, wie dies in den beiden ersten Darstellungen von t bei (6), (8), (17) in V. der Fall ist;

2) die Koefficienten von r im Zähler und Nenner von t_4 müssen ebenfalls einander gleich sein, wie dies in der 11. Darstellung an den angeführten Stellen der Fall ist. Nur unter diesen Bedingungen wird sich, wenn die Gleichung, wie oben angegeben ist, formirt wird, x^3 fortheben. Sind diese Bedingungen nicht vorhanden, so darf man in dem zweiten Faktor der quadratischen Gleichung nicht, wie es in den allgemeinen Gleichungen 3, 6 und 13 geschehen ist, die willkürlichen Faktoren n und m setzen, sondern mufs p und q nehmen. Wir wollen das an einem Beispiel zeigen.

Nach den Darstellungen von t bei (3) in I. würde man auf dem oben angegebenen Wege die Gleichung

$$\frac{(b-a+x)m+6an}{2bm+(a-b+x)n} \cdot \frac{(b-a+x)n+6am}{2bn+(a-b+x)m} = \frac{3(5a+b+x)}{a+5b+x}$$

erhalten. Soll die höchste Potenz von x sich schliefslich fortheben, so müfste

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{3}{1}$$

sein. Das ist nicht der Fall. Die Gleichung ist kubisch. Es ist eine dritte Wurzel hinzugekommen. Man findet als Lösung

$$x = 3(a-b)\left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right) - 11a + 5b, \quad \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Um auf eine quadratische Gleichung von der verlangten Form zu kommen, mufs man zunächst bilden

$$(8) \quad \frac{(b-a+x)m+6an}{2bm+(a-b+x)n} \cdot \frac{(b-a+x)p+6aq}{2bp+(a-b+x)q} = \frac{3(5a+b+x)}{a+5b+x}.$$

Soll diese Gleichung quadratisch sein, so ist zu setzen

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{3}{1}, \text{ d. h.}$$

$$mp = 3nq.$$

Diese Bedingung wird am einfachsten erfüllt durch

$$q = m, \quad p = 3n.$$

Setzt man dies in (8), so erhält man mit Fortlassung des Faktors 3 und mit einer kleinen Umstellung als die gesuchte allgemeine Gleichung

19. $\frac{(x-a+b)m+6an}{(x-b+a)m+6bn} \cdot \frac{(x-a+b)n+2am}{(x-b+a)n+2bm} = \frac{x+5a+b}{x+5b+a}$

L. $x = \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Setzt man $m = n$, so wird die Gleichung identisch. Setzt man 1) $m = 1$, $n = -1$; 2) $m = 2$, $n = 1$, so erhält man:

20. $\frac{x-7a+b}{x-7b+a} \cdot \frac{x-3a+b}{x-3b+a} = \frac{x+5a+b}{x+5b+a}$

21. $\frac{x+2a+b}{x+2b+a} \cdot \frac{x+3a+b}{x+3b+a} = \frac{x+5a+b}{x+5b+a}$

L. $x = \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

b. Eine zweite Methode, Gleichungen von der oben angegebenen Form aufzustellen, wird dadurch gefunden, daſs man diese Gleichungen als eine allgemeinere Form der in VII. behandelten Gleichungen auffaſst. Werden hier die beiden links stehenden Faktoren einander gleich, wie es z. B. oben in der Gleichung 10 der Fall ist, so nehmen die hier behandelten Gleichungen die Form der Gleichungen in VII. an. Wir können daher die in VII. angegebenen Methoden auch hier benutzen.

Ist die Lösung im voraus festgestellt, so suche man für dieselbe eine Gleichung von der in I. behandelten Form. Es möge gefunden sein

$$(9) \quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C}.$$

Bezeichnet man den Wert dieser Quotienten mit X, so hat man nach dem KS. auch

$$X = \frac{Am+Bn}{Bm+Cn} = \frac{Ap+Bq}{Bp+Cq}.$$

Sucht man aus beiden Gleichungen durch Multiplikation der gleichwertigen Quotienten X^2, so erhält man

$$(10) \quad \frac{Am+Bn}{Bm+Cn} \cdot \frac{Ap+Bq}{Bp+Cq} = \frac{A}{C},$$

eine Gleichung von der hier verlangten Form. Es ist nur noch zwischen m, n, p und q die Bedingung aufzustellen, daſs x^3 schlieſslich fortfällt.

Die Gleichung 7 in I. heifst, als Quotientengleichung geschrieben,

$$(11)\quad \frac{5x - 4a + 3b}{7x - 8a + b} = \frac{7x - 8a + b}{13x - 12a - 5b}.$$

Diese Gleichung hat die Form (8). Man hat also nach (10) hieraus hinzuschreiben

$$\frac{(5x-4a+3b)m+(7x-8a+b)n}{(7x-8a+b)m+(13x-12a-5b)n} \cdot \frac{(5x-4a+3b)p+(7x-8a+b)q}{(7x-8a+b)p+(13x-12a-5b)q}$$

$$(12)\qquad = \frac{5x - 4a + 3b}{13x - 12x - 5b}.$$

Soll sich schliefslich x^3 fortheben, so mufs man setzen

$$(13)\quad \frac{5m + 7n}{7m + 13n} \cdot \frac{5p + 7q}{7p + 13q} = \frac{5}{13}$$

$$\frac{25mp + 35np + 35mq + 49nq}{49mp + 91np + 91mq + 169nq} = \frac{5}{13}.$$

Die Glieder mit np und mq heben sich nach dem KS. fort. Man hat

$$\frac{25mp + 49nq}{49mp + 169nq} = \frac{5}{13}, \text{ d. h.}$$

$$5mp = 13nq.$$

Diese Bedingung wird erfüllt durch 1) $m = 13$, $q = 5$, $n = p = 1$; 2) $m = 13$, $q = 5$, $n = p = -1$ u. s. w. Damit erhält man aus (12) bezw.

22. $\frac{18x - 15a + 10b}{26x - 29a + 2b} \cdot \frac{10x - 11a + 2b}{18x - 17a - 6b} = \frac{5x - 4a + 3b}{13x - 12a - 5b}$

23. $\frac{29x - 22a + 19b}{39x - 46a + 9b} \cdot \frac{15x - 18a + b}{29x - 26a - 13b} = \frac{5x - 4a + 3b}{13x - 12a - 5b}$ etc.

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Man kommt durch die direkte Benutzung der Gleichung (11) zu grofsen Zahlen. Aufserdem ist die Bedingungsgleichung (13) komplicirter, als nötig ist. Man kommt einfacher zum Ziel, wenn man aus (11) nach dem KS. erst eine neue Quotientengleichung bildet, in welcher der Nenner links und der Zähler rechts kein x enthalten. Das giebt nach der vielfach angewendeten Weise

$$(14)\quad \frac{a + 8b + 4x}{12b - 5a} = \frac{3a + 4b}{a + 8b - 4x}.$$

Will man die Aufgabe allgemein weiter lösen, so mufs man aus dieser Gleichung und aus (11) eine allgemeine Gleichung bilden, wie sie in (12) gebildet ist. Man kommt auf

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{5}{13},$$

kann also setzen $m = 5$, $q = 13$, $p = n$ beliebig. Man erkennt aber auch, ohne die allgemeine Gleichung zu bilden, sofort, da der Quotient der Koefficienten von x^2 links schliefslich $\frac{5}{13}$ werden mufs, wie man aus (14) zwei neue gleichwertige Quotienten ableiten kann, welche für unsere Zwecke genügen. Man mufs erstens den ersten Quotienten mit 5 erweitern und den KS. mit Addition anwenden, zweitens den zweiten Quotienten mit 13 erweitern und abermals den KS. mit Addition anwenden. Man erhält noch zwei brauchbare Quotienten, wenn man statt der Addition Subtraktion anwendet. So erhält man aus (14)

$$\frac{2a + 11b + 5x}{17b - 6a - x} = \frac{10a + 15b + x}{2a + 29b - 13x}$$

$$\frac{10x + a + 18b}{2x - 13a + 26b} = \frac{19a + 22b - 2x}{9a + 46b - 26x}.$$

Diese Quotienten sind mit denen in (14), folglich auch mit denen in (11) gleichwertig. Man hat daher auf dem vielfach angewendeten Wege:

24. $\frac{2a + 11b + 5x}{17b - 6a - x} \cdot \frac{10a + 15b + x}{2a + 29b - 13x} = \frac{5x - 4a + 3b}{13x - 12a - 5b}$

25. $\frac{10x + a + 18b}{2x - 13a + 26b} \cdot \frac{19a + 22b - 2x}{9a + 46b - 26x} = \frac{5x - 4a + 3b}{13x - 12a - 5b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Viel einfacher wird die Aufstellung einer Gleichung von der hier verlangten Form, wenn man von den in I. behandelten oder entwickelten Gleichungen eine solche auswählt, in welcher die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren einander gleich sind.

Eine solche Gleichung ist 27 in I. Hier ist $19x = 19x$. Als Quotientengleichung heifst dieselbe

$$(15) \qquad \frac{41a - 7b + 19x}{19a + 19b + 17x} = \frac{19a + 19b + 17x}{41b - 7a + 19x}.$$

Erweitert man erstens den ersten Quotienten mit einer beliebigen Zahl 2 und wendet den KS. mit Addition an, zweitens den zweiten Quotienten mit 2 und wendet abermals den KS. mit Addition an, so erhält man die beiden neuen gleichwertigen Quotienten

$$(16)\quad \frac{101a + 5b + 55x}{31a + 79b + 53x} = \frac{79a + 31b + 53x}{101b + 5a + 55x}.$$

Wendet man statt der Addition Subtraktion an, so erhält man

$$(17)\quad \frac{21a - 11b + 7x}{15a - b + 5x} = \frac{15b - a + 5x}{21b - 11a + 7x}.$$

Die Quotienten in (15), (16) und (17) sind alle gleichwertig. Man erhält aus (16) und (15) einerseits, aus (17) und (15) andrerseits:

26. $\frac{101a + 5b + 55x}{101b + 5a + 55x} \cdot \frac{79a + 31b + 53x}{79b + 31a + 53x} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$

27. $\frac{21a - 11b + 7x}{21b - 11a + 7x} \cdot \frac{15b - a + 5x}{15a - b + 5x} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Ist die Gleichung (9) von der Art, wie oben die Gleichung (15), dafs die Koefficienten von x in A und C einander gleich sind, so hat man, wie es oben in 3, 6, 9 u. s. w. geschehen ist, statt (10) nur zu schreiben

$$(18)\quad \frac{Am + Bn}{Bm + Cn} \cdot \frac{An + Bm}{Bn + Cm} = \frac{A}{C}.$$

In dieser Gleichung mufs x^3 fortfallen; denn man hat, wenn man entwickelt,

$$\frac{(A^2 + B^2)mn + AB(m^2 + n^2)}{(B^2 + C^2)mn + BC(m^2 + n^2)} = \frac{A}{C}.$$

Wenn nun x in A und C gleiche Koefficienten hat, so mufs die höchste Potenz von x auch in $A^2 + B^2$ und $B^2 + C^2$, wie auch in AB und BC gleiche Koefficienten haben. Hat aber die höchste Potenz von x im Zähler und Nenner sowohl links als rechts gleiche Koefficienten, so mufs sich dieselbe schliefslich fortheben.

Nehmen wir für m und n bezw. 1) 3, 1; 2) 3, -1;

3) 3, — 2 und setzen für A, B, C die entsprechenden Ausdrücke aus (15), so erhalten wir:

28. $\frac{71a - b + 37x}{71b - a + 37x} \cdot \frac{49a + 25b + 35x}{49b + 25a + 35x} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$

29. $\frac{13a - 5b + 5x}{13b - 5a + 5x} \cdot \frac{a + 4b + 2x}{b + 4a + 2x} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$

30. $\frac{85a - 59b + 23x}{85b - 59a + 23x} \cdot \frac{71b - 25a + 13x}{71a - 25b + 13x} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$ u.s.w.

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Man wird jedoch mit Benutzung der in I. entwickelten oder vorkommenden Gleichungen meistens grofse Zahlen erhalten. Man thut auch hier am besten, wenn man von den einfachsten Quotientengleichungen ausgeht, welche sich aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung entwickeln lassen. Wir wollen auch hierfür einige Beispiele durchführen.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x = \sqrt{ab}$$

gegeben. Dann hat man hieraus zunächst die Quotientengleichung

$$(19)\quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Nach (18) ist hieraus hinzuschreiben

31. $\frac{am + nx}{bm + nx} \cdot \frac{an + mx}{bn + mx} = \frac{a}{b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Die Nenner sind vertauscht, damit die abgeleiteten Gleichungen mehr Symmetrie haben. — Setzt man für m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 2, — 1; 3) 3, 2, so erhält man die Gleichungen:

32. $\frac{2a + x}{2b + x} \cdot \frac{a + 2x}{b + 2x} = \frac{a}{b}$

33. $\frac{2a - x}{2b - x} \cdot \frac{2x - a}{2x - b} = \frac{a}{b}$

34. $\frac{3a + 2x}{2b + 2x} \cdot \frac{2a + 3x}{2b + 3x} = \frac{a}{b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Rechts steht immer derselbe Quotient. Dies wird auc bei allen solchen Entwickelungen der Fall sein, die mit B nutzung einer Gleichung gemacht werden, wie sie in I. vo kommen. Man kann aber auch rechts zu allgemeiner Formen gelangen. In der Regel werden diese allgemein Gleichungen sehr umfangreich, hier aber ist dieselbe leic aufgestellt, weil die zur Lösung gehörige Quotientengleichu (19) besonders einfach ist. Aus (19) hat man durch ko Addition

$$(20)\quad \frac{ma + nx}{pa + qx} = \frac{mx + nb}{px + qb}.$$

Erweitert man jetzt erstens den ersten Quotienten mit m, den zweiten mit n, zweitens den ersten mit p, den zweiten mit q und wendet jedesmal den KS. mit Addition an, so erhält man die beiden neuen gleichwertigen Quotienten

$$(21)\quad \frac{m^2a + 2mnx + n^2b}{mpa + (np + mq)x + nqb} = \frac{mpa + (np + mq)x + nqb}{p^2a + 2pqx + q^2b}.$$

Diese Gleichung ist schon in I. 69 aufgeführt. Setzt man die Produkte aus den gleichwertigen Quotienten in (20) und (21) einander gleich, so hat man ganz allgemein für die gegebene Lösung die quadratische Gleichung von der hier verlangten Form

35. $\frac{ma + nx}{pa + qx} \cdot \frac{mx + nb}{px + qb} = \frac{m^2a + 2mnx + n^2b}{p^2a + 2pqx + q^2b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) 1, 2, 2, 1; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 2, -1, 2, 1, so erhält man

36. $\frac{a + 2x}{b + 2x} \cdot \frac{x + 2b}{x + 2a} = \frac{a + 4b + 4x}{b + 4a + 4x}$

37. $\frac{3a + x}{3b + x} \cdot \frac{3x + b}{3x + a} = \frac{9a + b + 6x}{9b + a + 6x}$

38. $\frac{2a - x}{2a + x} \cdot \frac{2x - b}{2x + b} = \frac{4a + b - 4x}{4a + b + 4x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{ab}$.

Setzt man $m = 3$, $n = -2$, $p = -1$, $q = 2$, so erhält man die oben angeführte Gleichung 35_2. Die Gleichung 35_1 ist nicht in 35 enthalten.

Hier haben wir in 36—38 für jeden neuen Quotienten rechts auch links ein neues Produkt. Dafs man denselben Quotienten rechts durch unzählig viele Produkte ausdrücken kann, ist schon oben mehrfach gezeigt. Für die Gleichung 36 war z.B. $m = 1$, $n = 2$, $p = 2$, $q = 1$ gesetzt. Dann gehen die Gleichungen (20) und (21) über in

$$(22)\quad \frac{a+2x}{2a+x} = \frac{x+2b}{2x+b}$$

$$(23)\quad \frac{a+4b+4x}{2a+2b+5x} = \frac{2a+2b+5x}{4a+b+4x}.$$

Alle diese vier Quotienten sind gleichwertig. Bildet man aus den beiden ersteren nach dem KS. die beiden allgemeinen gleichwertigen Quotienten, so erhält man aus (22) und (23) nach (18) die allgemeine Gleichung

39. $\frac{(a+2x)m+(2b+x)n}{(2a+x)m+(2x+b)n} \cdot \frac{(a+2x)n+(2b+x)m}{(2a+x)n+(2x+b)m} = \frac{a+4b+4x}{b+4a+4x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Setzt man hierin für m und n bezw. 1) 1, 1; 2) 1, -1; 3) 3, 1; 4) 3, -1, so erhält man:

40. $\left(\frac{x+2b+3x}{b+2a+3x}\right)^2 = \frac{a+4b+4x}{b+4a+4x}$

41. $\left(\frac{a-2b+x}{b-2a+x}\right)^2 = \frac{a+4b+4x}{b+4a+4x}$

42. $\frac{3a+2b+7x}{3b+2a+7x} \cdot \frac{a+6b+5x}{b+6a+5x} = \frac{a+4b+4x}{b+4a+4x}$

43. $\frac{3a-2b+5x}{3b-2a+5x} \cdot \frac{6b-a+x}{6a-b+x} = \frac{a+4b+4x}{b+4a+4x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{ab}$.

Die Gleichungen 40 und 41, in welchen die beiden Faktoren links einander gleich geworden sind, gehören, genau genommen, in den 7. Abschnitt.

In derselben Weise würde man statt der einzelnen Gleichungen 37 und 38 beliebig viele hinschreiben können, welche alle rechts den Quotienten in 37 oder 38 haben.

Es sei als Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Dann hat man zunächst einfach

$$(24)\quad \frac{x+a}{b} = \frac{b}{x-a}.$$

Schon aus dieser Gleichung lassen sich beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Form hinschreiben. Nach (18) hat man allgemein

44. $\frac{(x+a)m + bn}{(x-a)n + bm} \cdot \frac{(x+a)n + bm}{(x-a)m + bn} = \frac{x+a}{x-a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Setzt man hierin für m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 1, 3; 3) 3, 2, so giebt das:

45. $\frac{2x + 2a + b}{2a - 2a + b} \cdot \frac{x + a + 2b}{x - a + 2b} = \frac{x+a}{x-a}$

46. $\frac{x + a + 3b}{x - a + 3b} \cdot \frac{3x + 3a + b}{3x - 3a + b} = \frac{x+a}{x-a}$

47. $\frac{3x + 3a + 2b}{3x - 3a + 2b} \cdot \frac{2x + 2a + 3b}{2x - 2a + 3b} = \frac{x+a}{x-a}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Vertauscht man x mit a, so wird die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Um auch rechts verschiedene Quotienten zu erhalten, hat man durch korr. Add. aus (24)

$$(25)\quad \frac{(x+a)m + bn}{(x+a)p + bq} = \frac{bm + (x-a)n}{bp + (x-a)q}.$$

Wendet man auf diese Gleichung den KS. in derselben Weise an, wie es oben bei (20) geschehen ist, um (21) zu bilden, so erhält man

$$(26)\quad \frac{(x+a)m^2 + 2mnb + (x-a)n^2}{(x+a)mp + (np+mq)b + (x-a)nq}$$
$$= \frac{(x+a)mp + (np+mq)b + (x-a)nq}{(x+a)p^2 + 2pqb + (x-a)q^2}.$$

Man erhält diese Gleichung auch aus der Formel III in I., wenn man dort, wie hier aus (24) folgt, $A = x + a$, $B = b$, $C = x - a$ setzt.

Bildet man jetzt in (25) und (26) die Produkte der gleichwertigen Quotienten und setzt dieselben einander gleich, so mufs, wenn x^3 sich fortheben soll, sein

$$\frac{mn}{pq} = \frac{m^2 + n^2}{p^2 + q^2}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m},$$

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n}, \quad \frac{n}{m}.$$

Da der erste Wert die Gleichung identisch macht, so kann nur

$$p = n, \quad q = m$$

genommen werden. Dann erhält man aus (25) und (26) nach dem vielfach angewendeten Verfahren

48. $\frac{(x+a)m+bn}{(x+a)n+bm} \cdot \frac{bm+(x-a)n}{bn+(x-a)m} = \frac{(x+x)m^2+2mnb+(x-a)n^2}{(x+a)n^2+2mnb+(x-a)m^2}$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Setzt man hierin für m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 3, 1, so erhält man:

49. $\frac{2x+2a+b}{2x-2a+b} \cdot \frac{x-a+2b}{x+a+2b} = \frac{5x+3a+4b}{5x-3a+4b}$

50. $\frac{3x+3a+b}{3x-3a+b} \cdot \frac{x-a+3b}{x+a+3b} = \frac{5x+4a+3b}{5x-4a+3b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Dafs man aus jeder dieser Gleichungen beliebig viele andere von derselben Form bilden kann, welche alle rechts denselben Koefficienten haben, ist oben an der Gleichung 36 gezeigt. In der Weise erhält man aus 49 allgemein

51. $\frac{(2x+2a+b)m+(x-a+2b)n}{(2x-2a+b)m+(x+a+2b)n} \cdot \frac{(2x+2a+b)n+(x-a+2b)m}{(2x-2a+b)n+(x+a+2b)m}$

$$= \frac{5x+3a+4b}{5x-3a+4b}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Setzt man hierin für m und n bezw. 1) 1, 1; 2) 2, − 1; 3) 3, 1; 4) 3, 2, so erhält man:

52. $\left(\frac{3x + a + 3b}{3x - a + 3b}\right)^2 = \frac{5x + 3a + 4b}{5x - 3a + 4b}$

53. $\frac{3x + 5a}{3x - 5a} \cdot \frac{3b - 4a}{3b + 4a} = \frac{5x + 3a + 4b}{5x - 3a + 4b}$

54. $\frac{7x + 5a + 5b}{7x - 5a + 5b} \cdot \frac{5x - a + 7b}{5x + a + 7b} = \frac{5x + 3a + 4b}{5x - 3a + 4b}$

55. $\frac{8x + 4a + 7b}{8x - 4a + 7b} \cdot \frac{7x + a + 8b}{7x - a + 8b} = \frac{5x + 3a + 4b}{5x - 3a + 4b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Gleichungen 52 und 53 gehören ihrer Form nach nicht ganz hierher, 52 gehört nach VII., 53 nach VI. Setzt man $m = 2$, $n = 1$ oder $m = 1$, $n = 2$, so wird die entstehende Gleichung identisch.

Es sei als Lösung noch

$$3)\quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$(27)\quad \frac{a + x}{b} = \frac{b}{a - x}.$$

Wie bei (25) und (26) $p = n$, $q = m$ sein mufste, wenn die Endgleichung quadratisch werden sollte, so findet man hier $p = n$, $q = -m$. Dann erhält man auf dem oben angegebenen Wege die allgemeine Gleichung

56. $\frac{(a + x)m + bn}{(a + x)n - bm} \cdot \frac{bm + (a - x)n}{bn - (a - x)m}$

$$= \frac{(a + x)m^2 + 2mnb + (a - x)n^2}{(a + x)n^2 - 2mnb + (a - x)m^2}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Setzt man für m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 3, 1, so erhält man:

57. $\frac{2x + 2a + b}{2x - 2a + b} \cdot \frac{a + 2b - x}{a - 2b + x} = \frac{5a + 4b + 3x}{5a - 4b - 3x}$

58. $\frac{3x + 3a + b}{3x - 3a + b} \cdot \frac{a + 3b - x}{a - 3b + x} = \frac{5a + 3b + 4x}{5a - 3b - 4x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Noch einfacher kann man aus der gegebenen Lösung
ıächst bilden

$$(28) \quad \frac{a+b}{x} = \frac{x}{a-b}.$$

eraus hat man allgemein

$$\frac{(a+b)m+nx}{(a-b)n+mx} \cdot \frac{(a+b)p+qx}{(a-b)q+px} = \frac{a+b}{a-b}$$

L. $x = \sqrt{a^2-b^2}$.

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 1, 1, 1, -1; 2, 1, 1, 2, so erhält man:

$$\frac{x+a+b}{x-a+b} \cdot \frac{a+b-x}{a-b+x} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{2a+2b+x}{2a-2b+x} \cdot \frac{a+b+2x}{a-b+2x} = \frac{a+b}{a-b} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2-b^2}$.

Allgemeiner erhält man aus (28) auf dem oben bei 1) ı 2) angegebenen Wege

$$\frac{(a+b)m+nx}{(a+b)p+qx} \cdot \frac{mx+(a-b)n}{px+(a-b)q} = \frac{(a+b)m^2+(a-b)n^2+2mnx}{(a+b)p^2+(a-b)q^2+2pqx}$$

L. $x = \sqrt{a^2-b^2}$.

Setzt man für m, n, p und q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 3, 1, 1, 3; 3) 3, 2, 1, 4, so erhält man:

$$\frac{2a+2b+x}{2a-2b+x} \cdot \frac{2x+a-b}{2x+a+b} = \frac{5a+3b+4x}{5a-3b+4x}$$

$$\frac{3a+3b+x}{3a-3b+x} \cdot \frac{3x+a-b}{3x+a+b} = \frac{5a+4b+3x}{5a-4b+3x}$$

$$\frac{3a+3b+2x}{4a-4b+x} \cdot \frac{3x+2a-2b}{4x+a+b} = \frac{13a+5b+12x}{17a-15b+8x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2-b^2}$.

c. Die hier in b. angegebene Methode ist für eine im :aus gegebene Lösung erschöpfend und liefert auch unıwer eine grofse Anzahl von Gleichungen. Will man och für eine gegebene Lösung nur eine oder einige Gleiıngen von der hier behandelten Form aufstellen, so kann man auf einem anderen Wege noch leichter zum Ziele gelangen. Denkt man, dafs der in allen Gleichungen, welche in VI. aufgestellt sind, vorkommende konstante Faktor auch x enthält, so nehmen jene Gleichungen die Form an, welche die hier voranstehenden Gleichungen haben. Es ist besonders die in V. und VI. vielfach angewendete, bei (22) und (22_1) in Eb. dargestellte Methode auch hier anwendbar. Wie man aus zwei gleichen Quotienten einen konstanten Faktor ausscheiden kann, z. B. bei (31) in Ve. den Faktor $\frac{a}{b}$, bei (2 in VIb. den Faktor $\frac{2a+b}{2a-b}$, so kann man aus zwei gleichen Quotienten auch ebenso gut einen Faktor ausscheiden, der x enthält.

Ist allgemein die Gleichung

$$(29) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

gegeben, so kann man aus derselben nach Eb. die Gleichung

$$(30) \quad \frac{Am + Cn}{Bm + Dn} = \frac{A}{D} \cdot \frac{Dp + Cq}{Bp + Aq}$$

bilden. Man hätte auch auf demselben Wege ebenso gut bilden können

$$(31) \quad \frac{Am + Cn}{Bm + Dn} = \frac{C}{B} \cdot \frac{Ap + Bq}{Cp + Dq}.$$

Die Gleichungen (30) und (31) haben die hier verlangte Form, wenn A, B, C, D lineare Ausdrücke von x sind.

Man kann auch noch allgemeiner verfahren. Man kann aus (29) durch korr. Add. zunächst bilden

$$(32) \quad \frac{Am + Bn}{Ap + Bq} = \frac{Cm + Dn}{Cp + Dq}.$$

Dann kann man aus dieser Gleichung, wie oben (31) aus (29) gebildet ist, die allgemeinste Gleichung dieser Art hinschreiben

$$(33) \quad \frac{(Am + Bn)m_1 + (Cm + Dn)n_1}{(Ap + Bq)m_1 + (Cp + Dq)n_1}$$
$$= \frac{Cm + Dn}{Ap + Bq} \cdot \frac{(Am + Bn)p_1 + (Ap + Bq)q_1}{(Cm + Dn)p_1 + (Cp + Dq)q_1}.$$

Die Gleichung enthält acht willkürliche Faktoren, über welche man beliebig verfügen kann.

Wir wollen das Verfahren an einigen Beispielen durchführen.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x=\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$x^2=(a-b)^2+ab$$

$$(34)\quad \frac{x+a-b}{b}=\frac{a}{x-a+b}.$$

Aus diesen beiden Quotienten kann man, wie es vielfach in V. geschehen ist, zwei gleichwertige Ausdrücke bilden, welche den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{a}{b}$ haben. Man kann aber auch zwei gleichwertige Ausdrücke bilden, welche den gemeinschaftlichen Faktor

$$\frac{x+a-b}{x-a+b}$$

haben, wo $x+a-b$ der Zähler des einen Quotienten, $x-a+b$ der Nenner des andern ist. Bezeichnet man den Wert der Quotienten in (34) mit X, so hat man auch

$$(35)\quad X=\frac{x+a-b}{x-a+b}\cdot\frac{x-a+b}{b}=\frac{x+a-b}{x-a+b}\cdot\frac{a}{x+a-b}.$$

Bildet man nun in (34) und (35) nach dem KS. die allgemeinen Ausdrücke für X und setzt diese einander gleich, so erhält man die Gleichung

$$(36)\quad \frac{(x+a-b)m+an}{bm+(x-a+b)n}=\frac{x+a-b}{x-a+b}\cdot\frac{(x-a+b)p+aq}{bp+(x+a-b)q}.$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

werden. Setzt man daher $p=m$, $q=n$, so erhält man für die gegebene Lösung die allgemeine Gleichung

66. $$\frac{(x+a-b)m+an}{bm+(x-a+b)n}=\frac{x+a-b}{x-a+b}\cdot\frac{(x-a+b)m+an}{bm+(x+a-b)n}$$

L. $x=\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

Setzt man hierin für m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 3, 2, so erhält man:

67. $$\frac{2x + 3a - 2b}{x - a + 3b} = \frac{x + a - b}{x - a + b} \cdot \frac{2x - a + 2b}{x + a + b}$$

68. $$\frac{3x + 5a - 3b}{2x - 2a + 5b} = \frac{x + a - b}{x - a + b} \cdot \frac{3x - a + 3b}{2x + 2a + b} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Wendet man auf (34) korr. Add. an, so erhält man zwei neue Quotienten, die unter einander gleich, aber mit den gegebenen ungleichwertig sind. Aus jeder solchen Quotientengleichung lassen sich, wie es oben bei der Gleichung (29) gezeigt ist, allgemeine Gleichungen und somit beliebig viele specielle Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten. Nimmt man z. B. der Gleichung (32) entsprechend $m = 3$, $n = 2$, $p = 2$, $q = 3$, so erhält man durch korr. Addition aus (34)

$$(37) \quad \frac{3x + 3a - b}{2x + 2a + b} = \frac{2x + a + 2b}{3x - a + 3b}.$$

Hier kann man den Faktor

$$\frac{3x + 3a - b}{3x + 3b - a}$$

ausscheiden. Dann erhält man, wenn man die übrig bleibenden Quotienten, wie auch die in (37), allgemein ausdrückt, nach der Analogie von (30) die allgemeine Gleichung

69. $$\frac{(3x + 3a - b)m + (2x + a + 2b)n}{(2x + 2a + b)m + (3x - a + 3b)n}$$
$$= \frac{3x + 3a - b}{3x + 3b - a} \cdot \frac{(3x + 3b - a)p + (2x + a + 2b)q}{(2x + 2a + b)p + (3x + 3a - b)q}.$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs man $p = m$, $q = n$ setzen. Dann wird die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Setzt man für m und n, also auch für p und q bezw. 1) 1, 1; 2) 1, − 1; 3) 3, 1, so erhält man:

70. $$\frac{5x + 4a + b}{5x + 4b + a} = \frac{3x + 3a - b}{3x + 3b - a} \cdot \frac{x + b}{x + a}$$

71. $\frac{x + 2a - 3b}{x + 2b - 3a} = \frac{3x + 3a - b}{3x + 3b - a} \cdot \frac{x - 2a + b}{x - 2b + a}$

72. $\frac{11x + 10a - b}{9x + 5a + 6b} = \frac{3x + 3a - b}{3x + 3b - a} \cdot \frac{11x + 11b - 2a}{9x + 9a + 2b}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Um die speciellen Gleichungen 35_3 und 35_8 auf diesem Wege abzuleiten, hat man aus (34) durch Umstellung

$$(38) \quad \frac{x - a + b}{b} = \frac{a}{x + a - b}$$

und hieraus nach dem KS. leicht

$$(39) \quad \frac{x + b}{x + a} = \frac{x + 2a + b}{3x + 3a - 2b} = \frac{3x - 2a + 3b}{x + a + 2b}.$$

Bei den letzten beiden Quotienten ist der Quotient

$$\frac{x + 2a + b}{x + 2b + a}$$

als Faktor vorzuziehen und auf die noch bleibenden gleichen Quotienten der KS. einfach mit Addition anzuwenden. Das giebt dann aus (39)

$$\frac{x + b}{x + a} = \frac{x + 2a + b}{x + 2b + a} \cdot \frac{4x - a + 5b}{4x - b + 5a} \quad [\text{s. } 35_3].$$

Weiter hat man aus (38) nach dem KS. leicht

$$\frac{2x - a + 2b}{x + a + b} = \frac{x + a + b}{2x + 2a - b}.$$

Multiplicirt man diese beiden Quotienten, welche denen in (39) gleichwertig sind, mit einander, ebenso die beiden letzten in (39) und setzt die Produkte einander gleich, so erhält man

$$\frac{2x - a + 2b}{2x - b + 2a} = \frac{x + 2a + b}{x + 2b + a} \cdot \frac{3x - 2a + 3b}{3x - 2b + 3a} \quad [\text{s. } 35_8].$$

Um 35_9 zu bilden, hat man in dieser Gleichung nur $-b$ statt b zu setzen.

Es sei als Lösung

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 - 10ab + b^2}$$

gegeben. Dann hat man zunächst die Quotientengleichung

$$(40) \quad \frac{a + b + x}{6a} = \frac{2b}{a + b - x}.$$

Um gerade auf die Gleichung 35 zu kommen, hat man hieraus durch korr. Add. und nach dem KS.

$$(41) \quad \frac{7a+b+x}{x-5a+b} = \frac{a+3b-x}{x-a+b} = \frac{11b-3a-5x}{a+3b+3x}.$$

Die beiden ersten Quotienten sind aus (40) durch einfache korr. Add. gebildet. Der letzte Quotient folgt aus den beiden ersten nach dem KS., nachdem man den ersten mit — 1, den zweiten mit 4 erweitert hat. Aus den beiden letzten Quotienten hat man, indem man den geeigneten Quotienten vorzieht, nach (22) in Eb. als gleichwertige Ausdrücke

$$(42) \quad \frac{5x+3a-11b}{x-a+b} \left| \frac{a+3b-x}{5x+3a-11b} = \frac{a-b-x}{a+3b+3x} \right|.$$

Aus den beiden gleichen in Klammern stehenden Ausdrücken findet man, indem man den ersten mit 4, den zweiten mit — 5 erweitert, nach dem KS. den neuen gleichwertigen Quotienten

$$\frac{x-a+17b}{5x+7a-59b}.$$

Dann ergiebt sich aus (41) und (42) die Gleichung [35]

$$\frac{7a+b+x}{x-5a+b} = \frac{5x+3a-11b}{x-a+b} \cdot \frac{x-a+17b}{5x+7a-59b}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 - 10ab + b^2}.$$

Um auf diesem Wege die Gleichung 35_1 zu bilden, muſs als Lösung

$$3) \quad x = \sqrt{ab}$$

gegeben sein. Dann hat man

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} = \frac{a+x}{b+x} = \frac{3a+x}{3x+b} = \frac{a+3x}{x+3b}.$$

Sondert man aus den beiden letzten Quotienten den Faktor $\frac{3a+x}{3b+x}$ aus und bildet aus den bleibenden Quotienten einen neuen gleichwertigen Quotienten, indem man den KS. mit Addition anwendet, so erhält man

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{3a+x}{3b+x} \cdot \frac{a+3b+4x}{b+3a+4x},$$

d. h. die Gleichung 35_1.

Um 35_4 zu bilden, mufs als Lösung

$$4)\quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben sein. Dann hat man, wie nach dem Obigen leicht verständlich ist,

$$\frac{x+b}{a} = \frac{a}{x-b} = \frac{x+a+b}{x+a-b}$$
$$= \frac{x+2a+b}{2x+a-2b} = \frac{2x+a+2b}{x+2a-b}$$
$$= \frac{x+2a+b}{x+2a-b} \cdot \frac{3x+3a+b}{3x+3a-b} \text{ u. s. w.}$$

Für dieselbe Lösung hat man, indem man die beiden ersten Quotienten durch korr. Add. aus den eben zuerst aufgestellten bildet und die beiden folgenden aus diesen nach dem KS. ableitet,

$$\frac{x+b}{a+b+x} = \frac{a}{a-b+x} = \frac{x-a+b}{2b} = \frac{2x-a+2b}{a+3b+x}$$
$$= \frac{x-a+b}{a+3b+x} \cdot \frac{2a+b-x}{a+b-x} \text{ u. s. w.}$$

Das giebt die Gleichung 35_5. — Oder man hat einerseits

$$(43)\quad X = \frac{a+b+x}{a} = \frac{2b}{a+b-x} = \frac{a+3b+x}{2a+b-x},$$

andrerseits

$$X = \frac{a+b+x}{a+b-x} \cdot \left| \frac{a+b-x}{a} = \frac{2b}{a+b+x} \right|$$
$$= \frac{a+b+x}{a+b-x} \cdot \frac{x-a+b}{x+b}.$$

Setzt man den dritten Quotienten in (43) gleich dem letzten Ausdruck, so erhält man die Gleichung 35_5.

Um 35_6 zu bilden, mufs als Lösung

$$5)\quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben sein. Dann hat man, wie nach dem Obigen leicht verständlich ist,

$$\frac{a+x}{b} = \frac{b}{a-x} = \frac{a+b+x}{a+b-x}, \text{ und auch}$$
$$= \frac{a+2b+x}{b+2a-2x} = \frac{2a+2x+b}{2b+a-x},$$

also nach dem vielfach angewendeten Verfahren

$$\frac{a+b+x}{a+b-x} = \frac{a+2b+x}{a+2b-x} \cdot \frac{a-b+3x}{b-a+3x} \text{ [s. } 35_6\text{]}.$$

Um 35_7 zu bilden, mufs als Lösung

$$6) \quad x = \sqrt{4a^2 - 7ab + 4b^2}$$

gegeben sein. Dann hat man

$$x^2 = 4(a-b)^2 + ab$$

$$\frac{x+2a-2b}{a} = \frac{b}{x-2a+2b} = \frac{x+2a-b}{x+2b-a}, \text{ und}$$

$$\frac{x+2a}{2x-3a+4b} = \frac{2x+4a-3b}{x+2b}.$$

Mithin nach dem vielfach angewendeten Verfahren

$$\frac{x+2a-b}{x+2b-a} = \frac{x+2a}{x+2b} \cdot \frac{3x+4a-b}{3x+4b-a} \text{ [s. } 35_7\text{]}.$$

Auch aus Quotientengleichungen, wie sie in [18] bis [28] oder im 4. Abschnitt vorkommen, lassen sich auf diesem Wege mit Leichtigkeit beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Art ableiten.

Es sei z. B.

$$7) \quad \frac{x+5a+b}{x-3a+b} = \frac{x-a+b}{a-x+3b} \text{ [s. 20]}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

gegeben. Dann hat man, wenn man den Wert dieser Quotienten mit X bezeichnet,

$$(44) \quad X = \frac{x-a+b}{x-3a+b} \cdot \left| \frac{x+5a+b}{x-a+b} = \frac{x-3a+b}{a-x+3b} \right|.$$

Es kommt nun darauf an, aus den beiden in (44) vorkommenden gleichen Quotienten, wie auch aus den beiden gegebenen nach dem KS. zwei neue Quotienten zu bilden von der Art, dafs sich bei der Substitution dieser in (44) und 7) schliefslich eine Gleichung von der hier verlangten Form ergiebt, in welcher sich x^3 forthebt. Die Bildung des einen der neuen Quotienten ist willkürlich. Hat man den einen gebildet, so ist damit die Bildung des andern schon vorgeschrieben. Erweitern wir in der gegebenen Gleichung den ersten Quotienten beliebig mit 2, den zweiten beliebig mit -1 und wenden den KS. mit Addition an, so erhalten wir den neuen gleichwertigen Quotienten

$$(45) \quad X = \frac{x + 11a + b}{3x - 7a - b}.$$

Das Glied mit der höchsten Potenz von x im Zähler, dividirt durch das entsprechende Glied im Nenner, giebt $\frac{1}{3}$. In dem in (44) ausgesonderten Quotienten ist das angegebene Verhältnis $\frac{1}{1}$. Soll daher x^3 sich schliefslich fortheben, so mufs in dem neuen Quotienten, der aus den beiden gleichwertigen Quotienten in (44) zu bilden ist, das Verhältnis der Glieder mit der höchsten Potenz von $x = \frac{1}{3}$ sein. Man mufs daher von den beiden gleichen Quotienten in (44) den ersten mit 2, den zweiten mit -1 erweitern und den KS. mit Addition anwenden. Dann erhält man aus (44)

$$(46) \quad X = \frac{x - a + b}{x - 3a + b} \cdot \frac{x + 13a + b}{3x - 3a - b}.$$

Aus (45) und (46) hat man daher

74. $\frac{x - a + b}{x - 3a + b} \cdot \frac{x + 13a + b}{3x - 3a - b} = \frac{x + 11a + b}{3x - 7a - b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Allgemeiner verfährt man nach (29) und (30) und bildet aus der gegebenen Gleichung zunächst allgemein

$$(47) \quad \frac{(x + 5a + b)m + (x - a + b)n}{(x - 3a + b)m + (a - x + 3b)n}$$
$$= \frac{x - a + b}{x - 3a + b} \cdot \frac{(x + 5a + b)p + (x - 3a + b)q}{(x - a + b)p + (a - x + 3b)q}.$$

Soll sich hierin x^3 fortheben, so mufs man setzen:

$$\frac{m + n}{m - n} = \frac{p + q}{p - q}, \text{ d. h.}$$
$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q},$$

also am einfachsten $p = m$, $q = n$. Setzt man dann in (47) für m und n bezw. 2 und -1, so erhält man 74. Setzt man weiter bezw. 1) 2, 1; 2) 3, 1, so erhält man mit einer kleinen Umstellung:

75. $\frac{3x + 9a + 3b}{3x + 7a + 3b} = \frac{x - a + b}{x - 3a + b} \cdot \frac{x - 5a + 5b}{x - a + 5b}$

76. $\frac{2x + 7a + 2b}{2x + 6a + 2b} = \frac{x - a + b}{x - 3a + b} \cdot \frac{x - 4a + 3b}{x - a + 3b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Es sei

$$8)\quad \frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - a + 2b}{3x - 3a + 2b} \text{ [s. 23]}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a(a - b)}$$

gegeben. Dann kann man nach (31) aus dieser Gleichung sofort hinschreiben

$$(48)\ \frac{(3a - 2b + 3x)m + (x - a + 2b)n}{(a - 2b + x)m + (3x - 3a + 2b)n}$$
$$= \frac{x - a + 2b}{x + a - 2b} \cdot \frac{(3a - 2b + 3x)p + (x + a - 2b)q}{(x - a + 2b)p + (3x - 3a + 2b)q}.$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs man setzen

$$\frac{3m + n}{m + 3n} = \frac{3p + q}{p + 3q}, \text{ d. h.}$$

$$p = m, \quad q = n.$$

Setzt man dann weiter für m und n bezw. 1) 1, 1; 2) 1, — 1, so erhält man aus (48):

77. $\frac{2x + a}{2x - a} = \frac{x - a + 2b}{x + a - 2b} \cdot \frac{x + a - b}{x - a + b}$

78. $\frac{2a - 2b + x}{2a - 2b - x} = \frac{x - a + 2b}{x + a - 2b} \cdot \frac{a + x}{a - x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a(a - b)}$.

Es sei

$$9)\quad \frac{3a - 2b + 3x}{a - 2b + x} = \frac{x - 7a + 8b}{3x - 5a + 4b} \text{ [s. 24]}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Dann hat man nach (30), da man leicht erkennt, dafs $p = m$, $q = n$ sein mufs, sofort

9. $\frac{(3a - 2b + 3x)m + (x - 7a + 8b)n}{(a - 2b + x)m + (3x - 5a + 4b)n}$

$$= \frac{3x + 3a - 2b}{3x - 5a + 4b} \cdot \frac{(3x - 5a + 4b)m + (x - 7a + 8b)n}{(a - 2b + x)m + (3x + 3a - 2b)n}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Setzt man hierin für m und n bezw. 1) 1, 1; 2) 2, - 1, so giebt das:

0. $\frac{2x - 2a + 3b}{2x - 2a + b} = \frac{3x + 3a - 2b}{3x - 5a + 4b} \cdot \frac{x - 3a + 3b}{x + a - b}$

1. $\frac{13a - 12b + 5x}{7a - 8b - x} = \frac{3x + 3a - 2b}{3x - 5a + 4b} \cdot \frac{3a - 5x}{a + 2b + x}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Nimmt man endlich noch

10) $\frac{a + b - x}{3a - b - 3x} = \frac{3(a - b + x)}{a - 5b + x}$ [s. 26]

L. $a = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$

.s gegeben an, so hat man, da man leicht findet, dafs $= m$, $q = -n$ sein mufs, nach (30)

2. $\frac{(a + b - x)m + 3(a - b + x)n}{(3a - b - 3x)m + (a - 5b + x)n}$

$$= \frac{a + b - x}{a - 5b + x} \cdot \frac{(a - 5b + x)m - 3(a - b + x)n}{(3a - b - 3x)m - (a + b - x)n}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Setzt man für m und n bezw. 1) 1, 1; 2) 1, — 1, so :hält man:

3. $\frac{2a - b + x}{2a - 3b - x} = \frac{a + b - x}{a - 5b + x} \cdot \frac{x + a + b}{x - a + b}$

4. $\frac{2x + a - 2b}{2x - a - 2b} = \frac{a + b - x}{a - 5b + x} \cdot \frac{a - 2b + x}{a - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

d. Da in IVf. gezeigt ist, dafs sich auch die voll- ;ändigen quadratischen Gleichungen auf die in IV. ɜrlangte Form bringen lassen, so müssen sie sich nach den ben in c. bei 7) bis 10) angegebenen Methoden auch auf die hier verlangte Form bringen lassen. Man hat die Gleichung nur in eine Quotientengleichung zu verwandeln und nach c. zu verfahren.

Hat die Gleichung die Wurzeln a und b, so hat man zunächst

$$(49)\quad \frac{a+b-x}{a} = \frac{b}{x}.$$

Hieraus durch korr. Addition, um die Gleichung etwas ansehnlicher zu machen,

$$(50)\quad \frac{b+x}{b+2x} = \frac{2a+b-x}{3a+b-x} = \frac{2a+3b+x}{3a+3b+3x}.$$

Der letzte Quotient ist aus den beiden ersten nach dem KS. gefunden. Nach (31) erhält man hieraus, indem man die beiden ersten Quotienten zur Bildung der linken Seite, die beiden letzten zur Bildung der rechten Seite benutzt,

$$(51)\quad \frac{(b+x)m+(2a+b-x)n}{(b+2x)m+(3a+b-x)n}$$
$$= \frac{2a+3b+x}{3a+b-x} \cdot \frac{(2a+b-x)p+(3a+b-x)q}{(2a+3b+x)p+(3a+3b+3x)q}.$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs man setzen

$$\frac{m-n}{2m-n} = \frac{p+q}{p+3q}, \text{ d. h.}$$

$$(52)\quad \frac{m}{2n} = \frac{q}{q-p}.$$

Setzt man in (51) daher für m, n, p, q bezw. 1) 1, -1, 3, 1; 2) 2, -1, 2, 1; 3) 3, 1, 1, 3, so erhält man:

85. $\frac{2x-2a}{3x-3a} = \frac{2a+3b+x}{3a+b-x} \cdot \frac{9a+4b-4x}{9a+12b+6x}$

86. $\frac{3x-2a+b}{5x-3a+b} = \frac{2a+3b+x}{3a+b-x} \cdot \frac{7a+3b-3x}{7a+9b+5x}$

87. $\frac{2x+2a+4b}{5x+3a+4b} = \frac{2a+3b+x}{3a+b-x} \cdot \frac{11a+4b-4x}{11a+12b+10x}$ u. s. w.

L. $x = a, b$.

Die Gleichung 85 ist leicht zu lösen durch Zerlegung: 1. $x - a = 0$ u. s. w.

Setzt man in (51) $n = 0$, $q = p$, wodurch die Bedingung (52) ebenfalls erfüllt wird, so erhält man

$$\frac{b + x}{b + 2x} = \frac{2a + 3b + x}{3a + b - x} \cdot \frac{5a + 2b - 2x}{5a + 6b + 4x} \text{ [s. 122]}$$

L. $x = a, b$.

Löst man die quadratische Gleichung, deren Wurzeln a und b sind, also

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

nach x auf, so hat man

$$2x = a + b + \sqrt{(a - b)^2}$$

$$(a + b - 2x)^2 = (a - b)^2$$

$$\frac{a + b - 2x}{a - b} = \frac{a - b}{a + b - 2x}.$$

Wendet man hierauf den KS. erstens mit Addition, zweitens mit Subtraktion an, so erhält man eine neue Form, in welcher die einfache quadratische Gleichung dargestellt werden kann, nämlich

$$(53) \quad \frac{a - x}{a - x} = \frac{b - x}{x - b}.$$

Erweitert man hier den zweiten Quotienten 1) mit 13, 2) mit 3, 3) mit -2 und wendet jedesmal den KS. mit Addition an, so erhält man die drei gleichen und mit denen in (53) gleichwertigen Quotienten

$$\frac{a + 13b - 14x}{a - 13b + 12x} = \frac{a + 3b - 4x}{a - 3b + 2x} = \frac{a - 2b + x}{a + 2b - 3x}.$$

Hieraus mit Benutzung der beiden ersten und der beiden letzten Quotienten nach (30) allgemein

$$(54) \quad \frac{(a + 13b - 14x)m + (a + 3b - 4x)n}{(a - 13b + 12x)m + (a - 3b + 2x)n}$$

$$= \frac{a + 3b - 4x}{a + 2b - 3x} \cdot \frac{(a + 2b - 3x)p + (a - 2b + x)q}{(a - 3b + 2x)p + (a + 3b - 4x)q}.$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs

$$\frac{7m + 2n}{6m + n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3p - q}{p - 2q}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{3m}{6m + 2n} = -\frac{q}{p}$$

werden. Setzt man daher für m, n, p und q bezw. 1) 1, 0, 2, — 1; 2) — 2, 9, 1, 1; 3) — 2, 3, 1, — 1; 4) 2, 3, 3, — 1, so erhält man aus (54):

88. $\frac{a + 13b - 14x}{a - 13b + 12x} = \frac{a + 3b - 4x}{a + 2b - 3x} \cdot \frac{a + 6b - 7x}{a - 9b + 8x}$ [s. 122_1]

89. $\frac{7a + b - 8x}{7a - b - 6x} = \frac{a + 3b - 4x}{a + 2b - 3x} \cdot \frac{a - x}{a - x}$

90. $\frac{a - 17b + 16x}{a + 17b - 18x} = \frac{a + 3b - 4x}{a + 2b - 3x} \cdot \frac{2(b - x)}{3(x - b)}$

91. $\frac{a + 7b - 8x}{a - 7b + 6x} = \frac{a + 3b - 4x}{a + 2b - 3x} \cdot \frac{a + 4b - 5x}{a - 6b + 5x}$ u. s. w.

L. $x = a, b$.

Dafs man auch mit jeder andern quadratischen Gleichung, welche rationale Wurzeln hat — die Gleichungen mit irrationalen Wurzeln haben hier kein Interesse — ähnliche Transformationen vornehmen kann, liegt auf der Hand. Man kann solche Gleichungen jedoch aus den hier aufgestellten ableiten, indem man die Wurzeln der Gleichung statt a und b setzt.

Setzt man in 86 und 87 z. B. $a + b$ statt a, $a - b$ statt b, so erhält man:

92. $\frac{3x - a - 3b}{5x - 2a - 4b} = \frac{5a - b + x}{4a + 2b - x} \cdot \frac{10a + 4b - 3x}{16a - 2b + 5x}$

93. $\frac{2x + 6a - 2b}{5x + 7a - b} = \frac{5a - b + x}{4a + 2b - x} \cdot \frac{15a + 7b - 4x}{23a - b + 10x}$

L. $x = a + b, a - b$.

Setzt man in denselben Gleichungen 86 und 87 $2a - b$ statt a, $2b - a$ statt b, so erhält man:

94. $\frac{3x - 5a + 4b}{5x - 7a + 5b} = \frac{a + 4b + x}{5a - b - x} \cdot \frac{11a - b - 3x}{5a + 11b + 5x}$

95. $\frac{2x + 6b}{5x + 2a + 5b} = \frac{a + 4b + x}{5a - b - x} \cdot \frac{18a - 3b - 4x}{10a + 13b + 10x}$

L. $x = 2a - b, 2b - a$.

X. $\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}=\frac{E}{F}$.

35$_{11}$. $\frac{(a+2b+x)^2+(b+2a-2x)^2}{(a-2b+x)^2+(b-2a+2x)^2}=\frac{5a+4b-3x}{5a-4b-3x}$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

35$_{12}$. $\frac{(4a-3b)^2+(4x+5b)^2}{(4a+3b)^2+(4x-5b)^2}=\frac{5x+3a+4b}{5x+3a-4b}$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

a. Diese Gleichungen haben die Form

$$\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}=\frac{E}{F}.$$

Gleichungen dieser Art lassen sich aus den Darstellungen von t, die sich aus symmetrischen Gleichungen des 4. Grades ergeben, leicht in beliebiger Anzahl hinschreiben. So hat man aus der 3., 4. und 11. Darstellung von t bei (6) in V, indem man zur 4. Potenz erhebt und x statt r setzt,

$$\left(\frac{5a+b-x}{x-a-5b}\right)^2=\left(\frac{7a-b+x}{7b-a+x}\right)^2=\frac{17a+b-x}{17b+a-x}.$$

Daher nach dem KS. durch Addition sofort

1. $\frac{(5a+b-x)^2+(7a-b+x)^2}{(5b+a-x)^2+(7b-a+x)^2}=\frac{17a+b-x}{17b+a-x}$,

und in derselben Weise aus andern dort angegebenen Darstellungen von t:

2. $\frac{(x+a-b)^2+36a^2}{(x-a+b)^2+36b^2}=\frac{17a+b-x}{17b+a-x}$

3. $\frac{(17a+b-x)^2+9(a+b-x)^2}{(17b+a-x)^2+9(a+b-x)^2}=\frac{17a+b-x}{17b+a-x}$

L. $x=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Die 2. Gleichung ist mit Hülfe der 1. und 2. Darstellung, die 3. Gleichung mit Hülfe der 5. und 6. Darstellung von t gebildet.

Man hat bei der Wahl der Darstellungen von t darauf zu achten, dafs in der aufzustellenden Gleichung sich schliefslich die höchste Potenz von x forthebt. Würde man die 2. und 4. Darstellung von t wählen, so würde man erhalten

$$\frac{36a^2 + (x + 7a - b)^2}{(x - a + b)^2 + (x + 7b - a)^2} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}.$$

Diese Gleichung ist kubisch. Man erhält als Lösung

$$x = 51a - 33b, \sqrt{a^2 + 34b + b^2}.$$

Die erste Wurzel ist neu hinzugekommen.

Man kann auch die allgemeinen Darstellungen von t bilden und aus diesen allgemeine Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten, die dann eine unendliche Anzahl specieller Gleichungen in sich schliefsen. So folgen aus den beiden ersten Darstellungen von t bei (6) in V. die allgemeinen Darstellungen von t^2, indem man x statt r setzt,

$$\frac{(a - b + x)m + 6an}{6bm + (b - a + x)n} = \frac{(a - b + x)p + 6aq}{6bp + (b - a + x)q}.$$

Man mufs daher nach dem Obigen die allgemeine Gleichung erhalten

$$(2)\quad \frac{((a - b + x)m + 6an)^2 + ((a - b + x)p + 6aq)^2}{((b - a + x)n + 6bm)^2 + ((b - a + x)q + 6bp)^2} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}.$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs

$$(3)\quad \frac{m^2 + p^2}{n^2 + q^2} = 1, \text{ d. h.}$$

$$m^2 - n^2 = q^2 - p^2$$

werden. Setzt man einfach $q = m$, $p = n$ und speciell für m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 3, 1, so erhält man aus der allgemeinen Gleichung die speciellen:

4. $$\frac{(8a - 2b + 2x)^2 + (13a - b + x)^2}{(8b - 2a + 2x)^2 + (13b - a + x)^2} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x}$$

5. $$\frac{(9a - 3b + 3x)^2 + (19a - b + x)^2}{(9b - 3a + 3x)^2 + (19b - a + x)^2} = \frac{17a + b - x}{17b + a - x} \text{ u. s. w.}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Aus den Darstellungen von t bei (8) in V. kann man nach dem angegebenen Verfahren sofort hinschreiben:

6. $$\frac{(x + 3a - 3b)^2 + 4a^2}{(x - 3a + 3b)^2 + 4b^2} = \frac{7a - 9b + 3x}{7b - 9a + 3x}$$

7. $\frac{(x+a-3b)^2+(x+5a-3b)^2}{(x+b-3a)^2+(x+5b-3a)^2}=\frac{7a-9b+3x}{7b-9a+3x}$

8. $\frac{(7a-9b+3x)^2+(3a+3b-x)^2}{(7b-9a+3x)^2+(3a+3b-x)^2}=\frac{7a-9b+3x}{7b-9a+3x}$

L. $x=\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

Wollte man aus den Darstellungen von t bei (3) in I. solche Gleichungen bilden, so würde das nicht so einfach sein, da sich bei den entstehenden Gleichungen x^3 nicht fortheben würde. Die Bildung einer allgemeinen Gleichung nach der Analogie von (2) würde zu nichts führen. Man würde statt (3) die Gleichung

$$\frac{m^2+n^2}{p^2+q^2}=3$$

erhalten. Diese ist jedoch in ganzen Zahlen nicht lösbar. Wenn man auch, wie wir später sehen werden, für die bei (3) in I. angegebene Lösung

$$x=\sqrt{a^2+10ab+b^2}$$

mit Leichtigkeit beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Form aufstellen kann, so sind doch die bei (3) in I. gegebenen Darstellungen von t hier nicht ausreichend. Man gelangt mehr durch Zufall als durch Konsequenz zu einer vereinzelten Gleichung von ähnlicher Form, wenn man die 3., 4. und 5. Darstellung von t bei (3) in I. zur 4. Potenz erhebt und die beiden ersten Quotienten nach dem KS. verbindet. Das giebt, wenn man x statt r setzt,

$$\frac{36a^2m+(x-a+b)^2n}{(x+a-b)^2m+4b^2n}=\frac{3(5a+b+x)}{5b+a+x}.$$

Soll x^3 schliefslich fortfallen, so mufs $n=3m$ werden. Setzt man dies, so erhält man

9. $\frac{(x-a+b)^2+12a^2}{(x+a-b)^2+12b^2}=\frac{5a+b+x}{5b+a+x}$

L. $x=\sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

b. Sehr einfach lassen sich solche Gleichungen auch aus Gleichungen ableiten, welche die in I. behandelte Form haben, besonders aus solchen, in welchen die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren einander gleich sind. Die in I. behandelten Gleichungen haben die Form

$$(4)\quad \frac{A}{B}=\frac{B}{C}.$$

In der ursprünglichen Form ($AC=B^2$) sind A und C die **ungleichen Faktoren**. Soll sich die Gleichung (4) leicht in eine Gleichung von der hier verlangten Form umwandeln lassen, so müssen die Koefficienten von x in A und C einander gleich sein. Denkt man den Wert der Quotienten in (4) mit X bezeichnet, so ist einerseits

$$X^2=\frac{A^2}{B^2}=\frac{B^2}{C^2}=\frac{A^2+B^2}{B^2+C^2},$$

andrerseits

$$X^2=\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}=\frac{A}{C}.$$

Mithin

$$(5)\quad \frac{A^2+B^2}{B^2+C^2}=\frac{A}{C}.$$

Oder man leitet aus (4) nach dem KS. zunächst

$$(6)\quad X=\frac{mA+nB}{mB+nC}=\frac{pA+qB}{pB+qC}$$

ab und hat dann wie in (5)

$$(7)\quad \frac{(mA+nB)^2+(pA+qB)^2}{(mB+nC)^2+(pB+qC)^2}=\frac{A}{C}.$$

Die Gleichung 27 in I. heifst in der Form (4)

$$(8)\quad \frac{41a-7b+19x}{19a+19b+17x}=\frac{19a+19b+17x}{41b-7a+19x}$$

L. $x=\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

Hier sind die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren einander gleich, $19=19$. Nach dem angegebenen Verfahren mufs man aus der Gleichung (8), der Gleichung (5) entsprechend, erhalten

10. $$\frac{(41a-7b+19x)^2+(19a+19b+17x)^2}{(41b-7a+19x)^2+(19a+19b+17x)^2}=\frac{41a-7b+19x}{41b-7a+19x}$$

L. $x=\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

$$\text{Xb.}\quad \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{E}{F}.$$

Bei der Bildung dieser Gleichungen hat man darauf zu achten, dafs sich x^3 forthebt. Die Gleichung (7) wird daher nicht ganz allgemein anwendbar sein, sondern die willkürlichen Faktoren sind einer Bedingung unterworfen. Da, wie aus der Vergleichung von (4) und (8) erhellt,

$$A = 41a - 7b + 19x,\ B = \text{u. s. w.}$$

ist, so mufs, wie man leicht erkennt, wenn für unsern Fall die Gleichung (7) quadratisch sein soll, die Bedingung

$$m^2 - n^2 = q^2 - p^2$$

stattfinden. Setzt man daher 1) $m = 1$, $n = 1$, $q = -1$, $p = 1$; 2) $m = 2$, $n = -1$, $p = -1$, $q = 2$; 3) $m = 1$, $n = 0$, $p = -\frac{3}{4}$, $p = \frac{5}{4}$, so erhält man aus (8), der Gleichung (6) entsprechend, bezw. zunächst:

$$(9)\quad \begin{aligned} \frac{5a + b + 3x}{5b + a + 3x} &= \frac{11a - 13b + x}{13a - 11b - x} \\ \frac{21a - 11b + 7x}{15a - b + 5x} &= \frac{15b - a + 5x}{21b - 11a + 7x} \\ \frac{41a - 7b + 19x}{19a + 19b + 17x} &= \frac{29b - 7a + 7x}{37b - 23a + 11x}. \end{aligned}$$

Daher nach (7) wegen (8), da die Quotienten in (9) und (8) sämmtlich einander gleich sind, entsprechend:

11. $$\frac{(5a + b + 3x)^2 + (11a - 13b + x)^2}{(5b + a + 3x)^2 + (11b - 13a + x)^2} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$$

12. $$\frac{(21a - 11b + 7x)^2 + (15b - a + 5x)^2}{(21b - 11a + 7x)^2 + (15a - b + 5x)^2} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$$

13. $$\frac{(41a - 7b + 19x)^2 + (29b - 7a + 7x)^2}{(19a + 19b + 17x)^2 + (37b - 23a + 11x)^2} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Die Gleichung 34 in I. heifst in der Form (4) oder (8)

$$\frac{9a + 57b - 7x}{21a + 21b - 11x} = \frac{21a + 21b - 11x}{9b + 57a - 7x}.$$

Hieraus, der Gleichung 10 entsprechend,

14. $$\frac{(9a + 57b - 7x)^2 + (21a + 21b - 11x)^2}{(9b + 57a - 7x)^2 + (21a + 21b - 11x)^2} = \frac{9a + 57b - 7x}{9b + 57a - 7x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

$$\text{X a.}\quad \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{E}{F}\,.$$

Hätte man in den Gleichungen 10—14 links Subtraktion statt der Addition angewendet, so hätte man nach dem KS. ebenfalls richtige Gleichungen erhalten; diese wären jedoch sämmtlich kubisch geworden. Statt 10 und 14 hätte man z. B. erhalten:

15. $$\frac{(41a - 7b + 19x)^2 - (19a + 19b + 17x)^2}{(19a + 19b + 17x)^2 - (41b - 7a + 19x)^2} = \frac{41a - 7b + 19x}{41b - 7a + 19x}$$

L. $x = -\frac{17(a+b)}{19}$, $\sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

16. $$\frac{(21a + 21b - 11x)^2 - (9a + 57b - 7x)^2}{(9b + 57a - 7x)^2 - (21a + 21b - 11x)^2} = \frac{9a + 57b - 7x}{9b + 57a - 7x}$$

L. $x = \frac{33(a+b)}{7}$, $\sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Etwas umständlicher, bisweilen direkt unmöglich, wird die Aufstellung der Gleichungen, wenn eine Gleichung aus dem 1. Abschnitt zum Grunde gelegt wird, in welcher die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren nicht einander gleich sind. Die Gleichung [8] vorn in I. heifst in der Form (4)

$$(10)\quad \frac{5a + b + x}{3a + 3b + 3x} = \frac{3a + 3b + 3x}{3a + 15b + 3x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Man wird sich vergebens bemühen nach (5) oder (7) aus dieser Gleichung eine Gleichung von der hier verlangten Form zu bilden. Man wird nur kubische Gleichungen erhalten, nie quadratische. Nach (7) würde hier, wenn sich x^3 fortheben soll,

$$\frac{(m + 3n)^2 + (p + 3q)^2}{(3m + 3n)^2 + (3p + 3q)^2} = \frac{1}{3}, \text{ d. h.}$$

$$m^2 + p^2 = 3(n^2 + q^2)$$

sein müssen. Diese Gleichung ist durch rationale ganze Zahlen nicht zu erfüllen. Nimmt man aber links die Differenzen der Quadrate statt der Summen, so mufs, wie aus (7) in diesem Falle folgt, wenn x^3 sich schliefslich fortheben soll,

$$\frac{(m + 3n)^2 - (p + 3q)^2}{(3m + 3n)^2 - (3p + 3q)^2} = \frac{1}{3}, \text{ d. h.}$$

$$m^2 - p^2 = 3(n^2 - q^2)$$

$$\text{Xb.}\quad \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{E}{F}.$$

sein. Setzt man daher 1) $n = 3$, $q = 2$, also $m = 4$, $p = 1$; 2) $n = 2$, $q = 1$, also $m = 5$, $p = 4$; 3) $n = 3$, $q = 1$, also $m = 5$, $p = 1$, so erhält man aus (10) nach dem KS. nach Angabe von (6) bezw. zunächst

$$\frac{29a + 13b + 13x}{21a + 57b + 21x} = \frac{11a + 7b + 7x}{9a + 33b + 9x}$$

$$\frac{31a + 11b + 11x}{21a + 45b + 21x} = \frac{23a + 7b + 7x}{15a + 27b + 15x}$$

$$\frac{17a + 7b + 7x}{12a + 30b + 12x} = \frac{4a + 2b + 2x}{3a + 9b + 3x}.$$

Diese Quotienten sind gleichwertig mit denen in (10). Daher erhält man aus diesen und aus denen in (10) in der oben angegebenen Weise, indem man nur die Differenzen statt der Summen setzt,

17. $$\frac{(29a + 13b + 13x)^2 - (11a + 7b + 7x)^2}{(7a + 19b + 7x)^2 - (3a + 11b + 3x)^2} = \frac{3(5a + b + x)}{5b + a + x}$$

18. $$\frac{(31a + 11b + 11x)^2 - (23a + 7b + 7x)^2}{(7a + 15b + 7x)^2 - (5a + 9b + 5x)^2} = \frac{3(5a + b + x)}{5b + a + x}$$

19. $$\frac{(17a + 7b + 7x)^2 - (4a + 2b + 2x)^2}{(4a + 10b + 4x)^2 - (a + 3b + x)^2} = \frac{3(5a + b + x)}{5b + a + x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

Setzt man links statt der Differenz der Quadrate die betreffenden Produkte, so kommt man auf Gleichungen, wie sie in IX. behandelt sind.

Soll die Gleichung (10) zur Aufstellung von Gleichungen benutzt werden, welche ganz von der vorn angegebenen Form sind, so mufs man sie erst so umformen, dafs sie die mehrfach erwähnte Eigenschaft besitzt. Das geschieht sehr leicht nach der Transformationsformel III im 1. Abschnitt. Für (10) ist

$$(11)\quad \begin{aligned} A &= 5a + b + x \\ B &= 3a + 3b + 3x \\ C &= 3a + 15b + 3x. \end{aligned}$$

Man hat in der Formel III für A, B, C nur die betreffenden Koefficienten von x, also 1, 3, 3 zu setzen und m, n p und

q so zu bestimmen, daſs die Bedingung erfüllt wird. Dann muſs sein

$$(12)\quad m^2+6mn+3n^2=p^2+6pq+3q^2.$$

Setzt man $q=n$, so hat man weiter

$$m+p+6n=0.$$

Die Gleichung (12) wird daher erfüllt durch

$$m=5,\quad p=1,\quad n=q=-1.$$

Dann geht die Gleichung (10) mit Hülfe der genannten Transformationsformel wegen (11) über in

$$(13)\quad \frac{49a+5b-x}{5a+b-5x}=\frac{5a+b-5x}{a+5b-x}.$$

Diese Gleichung hat die erwähnte Eigenschaft; es sind die Koefficienten von x in $49a+5b-x$ und $a+5b-x$ einander gleich. Aus (13) folgt nun, der Gleichung (6) entsprechend,

$$(14)\quad \frac{(49a+5b-x)m+(5a+b-5x)n}{(5a+b-5x)m+(a+5b-x)n}$$
$$=\frac{(49a+5b-x)p+(5a+b-5x)q}{(5a+b-5x)p+(a+5b-x)q}.$$

Soll sich schlieſslich in der Gleichung (7) x^3 fortheben, so muſs

$$\frac{(m+5n)^2+(p+5q)^2}{(5m+n)^2+(5p+q)^2}=1,\text{ d. h.}$$
$$m^2-n^2=q^2-p^2$$

werden. Die Gleichung läſst sich leicht in vielfacher Weise erfüllen, am einfachsten durch $q=m$, $p=n$. Setzt man daher für m, n, p, q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 2, -1, -1, 2, so erhält man aus (14) und (13), der Gleichung (7) entsprechend:

20. $$\frac{(103a+11b-7x)^2+(59a+7b-11x)^2}{(11a+7b-11x)^2+(7a+11b-7x)^2}=\frac{49a+5b-x}{a+5b-x}$$

21. $$\frac{(31a+3b+x)^2+(13a+b+3x)^2}{(3a-b-3x)^2+(a-3b-x)^2}=\frac{49a+5b-x}{a+5b-x}$$

L. $x=\sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

c. Viel zweckmäſsiger geht man auch hier von den einfachsten Quotientengleichungen aus, welche direkt aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung hervorgehen. Einige Beispiele werden das hier zu beobachtende Verfahren zeigen.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$(15)\quad \frac{a+b}{x} = \frac{x}{a-b}.$$

Aus dieser Gleichung kann man, da die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren einander gleich sind, nämlich $= 0$, nach den Erörterungen in b. direkt hinschreiben:

22. $\frac{(a+b)^2 + x^2}{(a-b)^2 + x^2} = \frac{a+b}{a-b}$

23. $\frac{(a+b+x)^2 + (a+b-x)^2}{(a-b+x)^2 + (a-b-x)^2} = \frac{a+b}{a-b}$

24. $\frac{(a+b+2x)^2 + (2a+2b+x)^2}{(a-b+2x)^2 + (2a-2b+x)^2} = \frac{a+b}{a-b}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Man kann auch ganz allgemein bilden:

24_1. $\frac{((a+b)m + nx)^2 + ((a+b)p + qx)^2}{((a-b)n + mx)^2 + ((a-b)q + px)^2} = \frac{a+b}{a-b}$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Soll jedoch im Quotienten rechts auch x vorkommen, so muſs man die Gleichung (15) erst umformen. Nach der Formel III in I. hat man aus (15)

$$(16)\quad \frac{m^2(a+b) + 2mnx + n^2(a-b)}{mp(a+b) + (np+mq)x + nq(a-b)}$$
$$= \frac{mp(a+b) + (np+mq)x + nq(a-b)}{p^2(a+b) + 2pqx + q^2(a-b)}.$$

Bildet man nun aus dieser Gleichung, welche der Gleichung (4) entspricht, die Gleichung, welche der Gleichung (5) entspricht, so muſs, wenn x^3 fortfallen soll,

$$\frac{4m^2n^2 + (np+mq)^2}{(np+mq)^2 + 4p^2q^2} = \frac{mn}{pq},\ \text{d. h.}$$

$$mn = pq$$

werden. Setzt man daher für m, n, p, q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 3, 2, 2, 3; 4) 3, 2, 6, 1, so erhält man aus (16):

$$(17)\quad \begin{aligned} \frac{5a+3b+4x}{4a+5x} &= \frac{4a+5x}{5a-3b+4x} \\ \frac{5a+4b+3x}{3a+5x} &= \frac{3a+5x}{5a-4b+3x} \\ \frac{13a+5b+12x}{12a+13x} &= \frac{12a+13x}{13a-5b+12x} \\ \frac{13a+5b+12x}{20a+16b+15x} &= \frac{20a+16b+15x}{37a+35b+12x}. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Quotientengleichungen erhält man, der Gleichung (5) entsprechend, bezw. folgende Gleichungen von der verlangten Form:

25. $\frac{(5a+3b+4x)^2+(4a+5x)^2}{(5a-3b+4x)^2+(4a+5x)^2}=\frac{5a+3b+4x}{5a-3b+4x}$

26. $\frac{(5a+4b+3x)^2+(3a+5x)^2}{(5a-4b+3x)^2+(3a+5x)^2}=\frac{5a+4b+3x}{5a-4b+3x}$

27. $\frac{(13a+5b+12x)^2+(12a+13x)^2}{(13a-5b+12x)^2+(12a+13x)^2}=\frac{13a+5b+12x}{13a-5b+12x}$

28. $\frac{(13a+5b+12x)^2+(20a+16b+15x)^2}{(37a+35b+12x)^2+(20a+16b+15x)^2}=\frac{13a+5b+12x}{37a+35b+12x}$

L. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Anstatt einer Gleichung kann man aus jeder der in (17) aufgestellten Gleichungen beliebig viele ableiten, wie es in b. aus der Gleichung (8) geschehen ist. So ergiebt sich z. B. aus der 1. Gleichung in (17) nach dem KS.

$$(18)\quad \frac{(5a+3b+4x)m+(4a+5x)n}{(4a+5x)m+(5a-3b+4x)n}=\frac{(5a+3b+4x)p+(4a+5x)q}{(4a+5x)p+(5a-3b+4x)q},$$

und man hat daher nach (7) allgemein die Gleichung

29. $\frac{((5a+3b+4x)m+(4a+5x)n)^2+((5a+3b+4x)p+4a+5x)q)^2}{((4a+5x)m+(5a-3b+4x)n)^2+((4a+5x)p+(5a-3b+4x)q)^2}$

$$=\frac{5a+3b+4x}{5a-3b+4x}$$

L. $x=\frac{(5a-3b)(n^2+q^2)-(5a+3b)(m^2+p^2)}{4(m^2+p^2)-4(n^2+q^2)}$, $\sqrt{a^2-b^2}$.*)

*) Die Auflösung der Gleichung ist nicht so schwer, als sie scheint.

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs, wie direkt aus der Gleichung folgt,

$$\frac{(4m+5n)^2+(4p+5q)^2}{(5m+4n)^2+(6p+4q)^2}=1, \text{ d. h.}$$
$$m^2-n^2=q^2-p^2$$

werden. Das folgt auch aus der zuerst angegebenen Lösung. Diese Gleichung wird am einfachsten erfüllt durch

$$m=\pm q, \qquad n=\pm p.$$

Man kann aber auch eine Zahl nehmen, die sich auf doppelte Weise in 2 Faktoren zerlegen läfst, z. B. $6=3\cdot 2=6\cdot 1$, und setzen die einen Faktoren gleich $m+n$ und $m-n$, die andern gleich $q+p$ und $q-p$; also $m=\frac{5}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, $q=\frac{7}{2}$, $p=\frac{5}{2}$, oder, da es nur auf das Verhältnis dieser Zahlen ankommt, $m=5$, $n=1$, $q=7$, $p=5$. Setzt man daher in 29. für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, -1; 2) 2, 1, -1, 2; 3) 5, 1, 5, 7, so erhält man entsprechend:

30. $$\frac{(3a+b+3x)^2+(3b+a-x)^2}{(3a-b+3x)^2+(3b-a+x)^2}=\frac{5a+3b+4x}{5a-3b+4x}$$

31. $$\frac{(14a+6b+13x)^2+(3a-3b+6x)^2}{(13a-3b+14x)^2+(6a-6b+3x)^2}=\frac{5a+3b+4x}{5a-3b+4x}$$

32. $$\frac{(29a+15b+25x)^2+(53a+15b+55x)^2}{(25a-3b+29x)^2+(55a-21b+53x)^2}=\frac{5a+3b+4x}{5a-3b+4x}$$

L. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Für den ersten und einfachsten Fall, also für $m=1$, $n=1$, $p=1$, $q=-1$, würde man aus den drei andern Quotientengleichungen in (17) bezw. erhalten:

33. $$\frac{(2a+b+2x)^2+(2b+a-x)^2}{(2a-b+2x)^2+(2b-a+x)^2}=\frac{5a+4b+3x}{5a-4b+3x}$$

34. $$\frac{(5a+b+5x)^2+(5b+a-x)^2}{(5a-b+5x)^2+(5b-a+x)^2}=\frac{13a+5b+12x}{13a-5b+12x}$$

35. $$\frac{(11a+7b+9x)^2+(7a+11b+3x)^2}{(19a+17b+9x)^2+(17a+19b-3x)^2}=\frac{13a+5b+12x}{37a+35b+12x}$$

L. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Man setze $5a+3b+4x=A$, $4a+5x=B$, $5a-3b+4x=C$. Dann heben sich nach dem KS. die Glieder $2AB(mn+pq)$ und $2BC(mn+pq)$ fort. Die noch bleibende Gleichung zerfällt in:

1) $AC-B^2=0$, 2) $A(m^2+p^2)=C(n^2+q^2)$ u. s. w.

Die Gleichung 33 stimmt mit [35_{11}] überein, nur steht $-x$ statt x, was nicht in Betracht kommt.

Dafs man in den Gleichungen 22—35 überall $-x$ statt x, $-a$ statt a, $-b$ statt b setzen kann, eins allein oder mehreres zugleich, versteht sich von selbst, da in der Lösung $x^2=a^2-b^2$ nur die Quadrate dieser Gröfsen vorkommen. — Diese Bemerkung gilt auch für die Gleichungen, welche zu der folgenden Lösung 2) entwickelt werden.

Nach der Lösung müssen alle diese Gleichungen 22—35 auch richtig bleiben, wenn man b und x vertauscht, aber man erhält kubische Gleichungen mit einer rationalen Wurzel; es kommt zu der angegebenen Lösung noch eine neue hinzu. So erhält man aus 30

36. $$\frac{(3a+3b+x)^2+(3x+a-b)^2}{(3a+3b-x)^2+(3x-a+b)^2}=\frac{5a+4b+3x}{5a+4b-3x}$$

L. $x=0$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

Aus Quotientengleichungen, wie sie in (17) angegeben sind, kann man auch Gleichungen von der hier behandelten Form bilden, in welchen links statt der Summen die Differenzen der Quadrate stehen; doch kommt man dann meistens auf kubische Gleichungen. So folgt aus der ersten Gleichung in (17)

37. $$\frac{(5a+3b+4x)^2-(4a+5x)^2}{(4a+5x)^2-(5a-3b+4x)^2}=\frac{5a+3b+4x}{5a-3b+4x}$$

L. $x=-\frac{5}{4}a$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

Zerlegt man die durch die Lösung gegebene Gleichung in eine andere Quotientengleichung von der in I. behandelten Form, als in (15), z. B. in

$$\frac{a+x}{b}=\frac{b}{a-x},$$

so kann man auf solche Gleichungen kommen, welche aus den bisher aufgestellten abgeleitet werden können, wenn man b und x vertauscht. Diese sind dann meistens kubisch. Man kann jedoch auch auf dem angegebenen Wege neue Gleichungen entwickeln.

Zu besonders einfachen Gleichungen gelangt man, wenn man in Quotientengleichungen, wie die drei ersten in (17) sind, durch Anwendung des KS. a erstens im Zähler, zweitens im Nenner eliminirt. Man erhält aus den drei ersten Gleichungen (17) bezw.

$$\frac{3x - 4b}{3a - 5b} = \frac{3a + 5b}{3x + 4b} \quad \text{vgl. VI. (37)}$$

$$\frac{4x - 3b}{4a - 5b} = \frac{4a + 5b}{4x + 3b} \quad \text{vgl. VI. (38)}$$

$$\frac{12b - 5x}{13b - 5a} = \frac{13b + 5a}{12b + 5x}.$$

Diese Quotienten sind alle mit den entsprechenden in (17) gleichwertig. Man kann daher nach dem oben mehrfach angewendeten Verfahren hinschreiben:

38. $$\frac{(3x - 4b)^2 + (3a + 5b)^2}{(3x + 4b)^2 + (3a - 5b)^2} = \frac{5a + 3b + 4x}{5a - 3b + 4x}$$

39. $$\frac{(4x - 3b)^2 + (4a + 5b)^2}{(4x + 3b)^2 + (4a - 5b)^2} = \frac{5a + 4b + 3x}{5a - 4b + 3x}$$

40. $$\frac{(12b - 5x)^2 + (13b + 5a)^2}{(12b + 5x)^2 + (13b - 5a)^2} = \frac{13a + 5b + 12x}{13a - 5b + 12x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Es sei als Lösung

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

gegeben. Die in 1) gegebene Lösung geht in diese über, wenn man a und x vertauscht. Alle in 22—40 aufgestellten Gleichungen müssen daher die hier angegebene Lösung erhalten, wenn man a und x vertauscht. Die quadratischen bleiben auch quadratisch, nur 28 und 35 werden kubisch. Hier hätte man, um auf Gleichungen zu kommen, die durch Vertauschung von a und x aus den Gleichungen 22—40 hervorgehen, aus der Lösung zunächst abzuleiten

$$\frac{x + b}{a} = \frac{a}{x - b}.$$

Statt der Gleichungen 25—27 würde man erhalten:

41. $$\frac{(5x + 4a + 3b)^2 + (4x + 5a)^2}{(5x + 4a - 3b)^2 + (4x + 5a)^2} = \frac{5x + 4a + 3b}{5x + 4a - 3b}$$

42. $\frac{(5x + 3a + 4b)^2 + (3x + 5a)^2}{(5x + 3a - 4b)^2 + (3x + 5a)^2} = \frac{5x + 3a + 4b}{5x + 3a - 4b}$

43. $\frac{(13x + 12a + 5b)^2 + (12x + 13a)^2}{(13x + 12a - 5b)^2 + (12x + 13a)^2} = \frac{13x + 12a + 5b}{13x + 12a - 5b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ebenso erhält man statt 30—32:

44. $\frac{(3a + b + 3x)^2 + (3b - a + x)^2}{(3a - b + 3x)^2 + (3b + a - x)^2} = \frac{5x + 4a + 3b}{5x + 4a - 3b}$

45. $\frac{(2a + b + 2x)^2 + (2b - a + x)^2}{(2a - b + 2x)^2 + (2b + a - x)^2} = \frac{5x + 3a + 4b}{5x + 3a - 4b}$

46. $\frac{(5a + b + 5x)^2 + (5b - a + x)^2}{(5a - b + 5x)^2 + (5b + a - x)^2} = \frac{13x + 12a + 5b}{13x + 12a - 5b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Desgleichen statt oder aus 38—40:

47. $\frac{(3x + 5b)^2 + (3a - 4b)^2}{(3x - 5b)^2 + (3a + 4b)^2} = \frac{5x + 4a + 3b}{5x + 4a - 3b}$

48. $\frac{(4x + 5b)^2 + (4a - 3b)^2}{(4x - 5b)^2 + (4a + 3b)^2} = \frac{5x + 3a + 4b}{5x + 3a - 4b}$

49. $\frac{(5x + 13b)^2 + (5a - 12b)^2}{(5x - 13b)^2 + (5a + 12b)^2} = \frac{13x + 12a + 5b}{13x + 12a - 5b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Gleichung 48 stimmt mit der Gleichung 35_{12} überein. Sie ist gefunden aus der Quotientengleichung

$$(19) \quad \frac{4x + 5b}{4a + 3b} = \frac{4a - 3b}{4x - 5b}.$$

Man mufs aus diesen beiden Quotienten zwei andere gleichwertige Quotienten suchen, bei welchen der Zähler des einen gleich dem Nenner des andern ist. Man findet nach Vg.

$$(20) \quad \frac{3x + 5a}{5x + 3a - 4b} = \frac{5x + 3a + 4b}{3x + 5a}.$$

Dann folgt nach (19) und (20) nach dem wiederholt angewendeten Verfahren die Gleichung 48.

Überhaupt ergeben sich für vorher bestimmte Lösungen die einfachsten Gleichungen von der hier verlangten Form, wenn man die einfachen Quotientengleichungen zum Grunde legt, welche auf Gleichungen von der in VI. behandelten

Form mit denjenigen konstanten Faktoren führen, die nach VIf. für die gegebene Lösung möglich sind. Es sei z. B. als Lösung

$$3)\quad x=\sqrt{a^2+ab+b^2}$$

gegeben. Nach VIf. 4) gehören zu dieser Lösung die konstanten Faktoren:

1) $\frac{a}{b}$, 2) $\frac{8a+5b}{8b+5a}$, 3) $\frac{15a+7b}{15b+7a}$, 4) $\frac{5a-3b}{5b-3a}$ u. s. w.

Die zugehörigen Quotientengleichungen sind nach VIf:

$$(21)\quad\begin{cases} 1)\ \frac{a+b+x}{b}=\frac{a}{a+b-x}\\ 2)\ \frac{7a+7b+3x}{8b+5a}=\frac{8a+5b}{7a+7b-3x}\\ 3)\ \frac{13a+13b+8x}{15b+7a}=\frac{15a+7b}{13a+13b-8x}\\ 4)\ \frac{7a+7b-8x}{5b-3a}=\frac{5a-3b}{7a+7b+8x}. \end{cases}$$

Zu jeder dieser Quotientengleichungen hat man nach dem KS., wie in Vg. angegeben ist, eine neue Quotientengleichung zu suchen, in welcher der Nenner des einen Quotienten dem Zähler des andern gleich ist. Man findet bezw.

$$(22)\quad\begin{cases} 1)\ \frac{x-a+b}{2x-2a-b}=\frac{2x+2b+a}{x-a+b}\\ 2)\ \frac{13x-7a+7b}{14x-11a+2b}=\frac{14x+11b-2a}{13x-7a+7b}\\ 3)\ \frac{22x-13a+13b}{26x-23a-b}=\frac{26x+23b+a}{22x-13a+13b}\\ 4)\ \frac{2x+7a-7b}{14x+13a+11b}=\frac{14x-11a-13b}{2x+7a-7b}. \end{cases}$$

Aus den in (21) angegebenen Quotienten und den entsprechenden gleichwertigen in (22) erhält man nach dem wiederholt angewendeten Verfahren die Gleichungen:

50. $\frac{(a+b+x)^2+a^2}{(a+b-x)^2+b^2}=\frac{2x+a+2b}{2x-b-2a}$

51. $\frac{(7a+7b+3x)^2+(8a+5b)^2}{(7a+7b-3x)^2+(8b+5a)^2}=\frac{14x-2a+11b}{14x+2b-11a}$

52. $\frac{(13a+13b+8x)^2+(15a+7b)^2}{(13a+13b-8x)^2+(15b+7a)^2} = \frac{26x+a+23b}{26x-b-23a}$

53. $\frac{(7a+7b-8x)^2+(5a-3b)^2}{(7a+7b+8x)^2+(5b-3a)^2} = \frac{14x-11a-13b}{14x+11b+13a}$ u. s. w.

L. $x = \sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Dafs man aus jeder der in (22) aufgestellten Gleichungen nicht eine, sondern beliebig viele Gleichungen von der hier gewünschten Form ableiten kann, ist oben gezeigt und geschieht nach (7).

XI. $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$.

36. $\frac{6x+9a+b}{4x+3a+b} - \frac{6x+9b+a}{4x+3b+a} = \frac{2(a-b)}{a+b+2x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

36_1. $\frac{17a+b-x}{7a-b+x} - \frac{17b+a-x}{7b-a+x} = \frac{8(a-b)}{3a+3b-x}$

L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

36_2. $\frac{7a-9b+3x}{5a-3b+x} - \frac{7b-9a+3x}{5b-3a+x} = \frac{8(a-b)}{a+b+x}$

L. $x = \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

Diese Gleichungen sind nur andere Formen der in VIII. behandelten Gleichungen. Die letzteren haben mit Vertauschung der Seiten die Form

$$(1)\quad \frac{A}{C} = \left(\frac{B}{D}\right)^2.$$

Statt dessen kann man auch schreiben

$$(2)\quad \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A-C}{B+D}.$$

Die Gleichung [33_3] heifst

$$\left(\frac{4x+3a+b}{4x+3b+a}\right)^2 = \frac{6x+9a+b}{6x+9b+a}.$$

Dies mit (1) verglichen giebt:

$$B = 4x+3a+b \qquad A = 6x+9a+b$$
$$D = 4x+3b+a \qquad C = 6x+9b+a.$$

Also

$$B + D = 4(2x + a + b) \qquad A - C = 8(a - b).$$

Setzt man diese Werte in (2) ein, so erhält man 36.

Ebenso ist 36_1 nur eine andere Form der Gleichung [33_2], 36_2 nur eine andere Form der Gleichung [33].

Man kann jedoch aus jeder Quotientengleichung, wie sie in IV. vorkommen, und aus jeder durch die Lösung gegebenen Gleichung in viel allgemeinerer Weise Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten.

Hat man für eine Lösung die Quotientengleichung

$$(3) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

so kann man aus derselben nach dem KS. einen dritten gleichwertigen Quotienten bilden, so dafs

$$(4) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{Am + Cn}{Bm + Dn}$$

ist. Dann hat man aber auch:

$$(5) \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{2(Am + Cn)}{Bm + Dn}$$

$$(6) \quad \frac{A}{B} + \frac{Am + Cn}{Bm + Dn} = \frac{2C}{D}$$

$$(7) \quad \frac{C}{D} + \frac{Am + Cn}{Bm + Dn} = \frac{2A}{B}.$$

Es sind m und n nur so zu bestimmen, dafs die Gleichung quadratisch wird, d. h. dafs sich x^3 schliefslich forthebt.

Hat die Quotientengleichung die Form der in I. behandelten Gleichungen, nämlich

$$(8) \quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C},$$

so ist die Formation der Gleichungen leicht in noch allgemeinerer Weise zu bewerkstelligen. Man hat 1) nach dem KS., 2) durch korr. Add. aus (8):

$$1) \quad \frac{Am + Bn}{Bm + Cn} = \frac{Ap + Bq}{Bp + Cq}$$

$$2) \quad \frac{Am_1 + Bn_1}{Ap + Bq} = \frac{Bm_1 + Cn_1}{Bp + Cq}.$$

Durch Addition ergiebt sich hieraus die gesuchte Gleichung

$$(9) \quad \frac{Am + Bn}{Bm + Cn} + \frac{Am_1 + Bn_1}{Ap + Bq} = \frac{Ap + B(m_1 + q) + Cn_1}{Bp + Cq}.$$

Hierin sind dann die willkürlichen Faktoren noch so zu bestimmen, dafs x^3 fortfällt.

Wir wollen das Gesagte an einigen Beispielen durchführen. Es sei

$$1) \quad \frac{a + b - x}{3a - b - 3x} = \frac{3(a - b + x)}{a - 5b + x} \quad [26]$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben, eine Quotientengleichung, der Gleichung (3) entsprechend. Dann hat man nach (5)

$$(10) \quad \frac{a + b - x}{3a - b - 3x} + \frac{3(a - b + x)}{a - 5b + x}$$
$$= \frac{2(a + b - x)m + 6(a - b + x)n}{(3a - b - 3x)m + (a - 5b + x)n}$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so mufs man setzen

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{1} = \frac{6n - 2m}{n - 3m}, \text{ d. h.}$$

$$n = 3m, \text{ also } m = -1, \; n = 3.$$

Dann erhält man aus (10)

$$1. \quad \frac{a + b - x}{3a - b - 3x} + \frac{3(a - b + x)}{a - 5b + x} = \frac{2(4a - 5b + 5x)}{3x - 7b}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Ebenso erhält man nach (6), wo $m = 1$, $n = 6$ zu setzen ist, und nach (7), wo $m = 2$, $n = 3$ zu setzen ist, bezw. die Gleichungen:

$$2. \quad \frac{a + b - x}{3a - b - 3x} + \frac{19a - 17b + 17x}{9a - 31b + 3x} = \frac{6(a - b + x)}{a - 5b + x}$$

$$3. \quad \frac{3(a - b + x)}{a - 5b + x} + \frac{11a - 7b + 7x}{9a - 17b - 3x} = \frac{2(a + b - x)}{3a - b - 3x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Will man die Formel (9) anwenden, so mufs die gegebene Gleichung erst in eine Gleichung von der Form (8) umgewandelt werden. Eine solche ist z. B. 53 in I., als Quotientengleichung geschrieben

$$\frac{a + b + 2x}{2a - b + x} = \frac{2a - b + x}{a - 2b + 2x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Dann hat man nach (9)

$$\frac{(a+b+2x)m + (2a-b+x)n}{(2a-b+x)m + (a-2b+2x)n} + \frac{(a+b+2x)m_1 + (2a-b+x)n_1}{(a+b+2x)p + 2a-b+x)q}$$

$$(11) \quad = \frac{(a+b+2x)p + (2a-b+x)(m_1+q) + (a-2b+2x)n_1}{(2a-b+x)p + (a-2b+2x)q}.$$

Soll x^3 fortfallen, so mufs

$$(12) \quad \frac{2m + n}{m + 2n} + \frac{2m_1 + n_1}{2p + q} = \frac{2p + q + m_1 + 2n_1}{p + 2q}$$

werden. Um diese Gleichung zu erfüllen, ist es am einfachsten, m_1, n_1, p und q beliebig anzunehmen und vermittelst der Gleichung (12) die beiden noch übrigen Faktoren m und n, von denen nur das Verhältnis vorkommt, zu bestimmen. Nimmt man z. B.

$$m_1 = 2, \quad n_1 = 1, \quad p = 1, \quad q = 2,$$

so wird

$$\frac{2m + n}{m + 2n} = \frac{7}{20}, \text{ d. h.}$$

$$11m = -2n, \text{ also}$$

$$m = -2, \; n = 11.$$

Dann geht die Gleichung (11) über in

$$4. \quad \frac{20a - 13b + 7x}{7a - 20b + 20x} + \frac{4a + b + 5x}{5a - b + 4x} = \frac{10a - 5b + 8x}{4a - 5b + 5x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Einfacher ist es, die Lösung als gegeben anzunehmen und von der durch die Lösung gegebenen Gleichung auszugehen. Man bildet dann aus dieser zunächst eine Gleichung von der in I. behandelten Form. Es sei z. B.

$$2) \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

als Lösung der aufzustellenden Gleichung gegeben. Dann hat man zunächst

$$\frac{x + a}{b} = \frac{b}{x - a}.$$

Hieraus hat man nach (9)

$$(13)\quad \frac{(x+a)m+bn}{bm+(x-a)n} + \frac{(x+a)m_1+bn_1}{(x+a)p+bq}$$
$$= \frac{(x+a)p+b(m_1+q)+(x-a)n_1}{bp+(x-a)q}.$$

Soll x^3 fortfallen, so mufs

$$(14)\quad \frac{m}{n} + \frac{m_1}{p} = \frac{p+n_1}{q}$$

werden. Man kann auch hier, wie oben, m_1, n_1, p und q beliebig annehmen und aus der Bedingungsgleichung m und n bestimmen. Setzt man, wie oben,

$$m_1 = 2,\ n_1 = 1,\ p = 1,\ q = 2,$$

so wird

$$\frac{m}{n} = -1, \text{ d. h. } m = 1,\ n = -1$$

Dann geht (13) über in

5. $\frac{a-b+x}{a+b-x} + \frac{2x+2a+b}{x+a+2b} = \frac{2x+4b}{2x-2a+b}$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Man hat auch, um (14) zu erfüllen, identisch

$$1)\quad \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} = \frac{2+5}{6}$$

$$2)\quad \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} = \frac{3+2}{6} \text{ u. s. w.}$$

Man kann also aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit (14) sofort hinschreiben:

1) $m = 2,\ n = 3,\ m_1 = 1,\ n_1 = 5,\ p = 2,\ q = 6,$

2) $m = 3,\ n = 2,\ m_1 = -2,\ n_1 = 2,\ p = 3,\ q = 6.$

Dann geht (13) entsprechend über in:

6. $\frac{4x+4a+6b}{3x-3a+2b} + \frac{x+a+5b}{x+a+3b} = \frac{7x-3a+7b}{3x-3a+b}$

7. $\frac{9x+9a+6b}{2x-2a+3b} - \frac{2(x+a-b)}{x+a+2b} = \frac{5x+a+4b}{2x-2a+b}$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Auch jede vollständige quadratische Gleichung läſst sich leicht auf diese Form bringen. Man hat sie zunächst nur in eine Quotientengleichung von der Form (8) zu verwandeln. Wenn z. B. die allgemeine Gleichung

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0$$

gegeben ist, so kann man sie nach I, 72 auch so schreiben:

$$\frac{a + b - 2x}{2x - 3a + b} = \frac{2x - 3a + b}{9a + b - 10x}.$$

Diese geht nach (9) über in

$$\frac{(a + b - 2x)m + (2x - 3a + b)n}{(2x - 3a + b)m + (9a + b - 10x)n} + \frac{(a + b - 2x)m_1 + (2x - 3a + b)n_1}{(a + b - 2x)p + (2x - 3a + b)q}$$
$$= \frac{(a + b - 2x)p + (2x - 3a + b)(m_1 + q) + (9a + b - 10x)n_1}{(2x - 3a + b)p + (9a + b - 10x)q}.$$

Soll die Gleichung quadratisch sein, so muſs man setzen

$$\frac{m - n}{5n - m} + \frac{m_1 - n_1}{p - q} = \frac{p - (m_1 + q) + 5n_1}{5q - p}.$$

Diese Bedingung wird erfüllt durch $m_1 = 1$, $n_1 = 2$, $p = 2$, $q = 1$, also $m = 17$, $n = 4$, und man erhält

8. $\frac{5a + 21b - 26x}{5a - 7b + 2x} + \frac{3(2x - 15a + 3b)}{2x + a - 3b} = \frac{2(7a + 3b - 10x)}{2x - a - b}$

L. $x = a, b$.

XII. $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}$.

46. $\sqrt{4a + b - 4x} - 2\sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

47. $\sqrt{3a - 2b + 2x} - \sqrt{3a - 2b - 2x} = 2\sqrt{a}$

L. $x = \sqrt{2a(a - b)}$.

48. $\sqrt{2a - b + 2x} - \sqrt{10a - 9b - 6x} = 4\sqrt{a - b}$

L. $x = \sqrt{a(a - b)}$.

49. $\sqrt{3a - 4b + 5x} + \sqrt{x - a} = 2\sqrt{x + a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

50. $\sqrt{3a - 4b + 5x} - \sqrt{x - a} = 2\sqrt{2(x - b)}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

51. $\sqrt{5x - 3a + 4b} + \sqrt{5x - 3a - 4b} = 2\sqrt{x + a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

52. $\sqrt{2a + b + 2x} + \sqrt{10a + 9b - 6x} = 2\sqrt{2a + b - 2x}$

L. $x = \sqrt{a(a + b)}$.

53. $2\sqrt{2a + b + 2x} + \sqrt{10a + b - 6x} = \sqrt{10a + 9b - 6x}$

L. $x = \sqrt{a(a + b)}$.

54. $\sqrt{2a - 13b + 14x} + \sqrt{3(b - 2a + 2x)} = 2\sqrt{2a - b + 2x}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

55. $\sqrt{3(7a + b + x)} - \sqrt{a + 7b - x} = 2\sqrt{7a + b - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

a. Diese Gleichungen haben die Form

$$(1) \quad \sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}.$$

Die vor den Wurzeln etwa stehenden Zahlenfaktoren kann man leicht unter die Wurzel bringen.

Auch für diese Gleichungen liegt der ursprüngliche Schlüssel zur Aufstellung derselben in den symmetrischen Gleichungen des 4. Grades. Aus den Darstellungen von t, welche sich aus symmetrischen Gleichungen des 4. Grades ergeben, lassen sich immer Gleichungen von der oben stehenden Form ableiten. Diese Ableitung ist sehr einfach, wenn r im Zähler und Nenner des Radikanden von t_4 mit gleichen Zeichen und gleichen Koefficienten vorkommt. Dann hat man nur das Quadrat von t_4 gleich dem Quadrat von t_{xy} und $t_{x^2+y^2}$ zu setzen und x statt r, so ergeben sich durch korr. Add. leicht zwei Gleichungen von der verlangten Form. In den Darstellungen von t zu der symmetrischen Gleichung des 4. Grades (5) in Vb., welche dort unter (6) aufgestellt sind, ist, wenn man x statt r setzt,

$$t_4 = \sqrt[4]{\frac{17a + b - x}{17b + a - x}}$$

$$t_{xy} = \sqrt{\frac{7a - b + x}{7b - a + x}}$$

$$t_{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{5a + b - x}{x - a - 5b}}.$$

Hier hat t_4 die oben angegebene Eigenschaft. Man hat zu setzen

$$\sqrt{\frac{17a + b - x}{17b + a - x}} = \frac{7a - b + x}{7b - a + x} = \frac{5a + b - x}{x - a - 5b}.$$

Hieraus ergiebt sich durch korr. Add.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \dfrac{\sqrt{17a + b - x} + \sqrt{17b + a - x}}{\sqrt{17a + b - x} - \sqrt{17b + a - x}} = \dfrac{3a + 3b + x}{4(a - b)} \\ 2)\ \dfrac{\sqrt{17a + b - x} + \sqrt{17b + a - x}}{\sqrt{17a + b - x} - \sqrt{17b + a - x}} = \dfrac{2(a - b)}{3a + 3b - x}. \end{array}\right\} (2)$$

Schafft man in der ersten Gleichung links die Wurzeln aus dem Nenner fort, in der zweiten Gleichung aus dem Zähler, so erhält man bezw.

$$1)\ \frac{(\sqrt{17a + b - x} + \sqrt{17b + a - x})^2}{16(a - b)} = \frac{3a + 3b + x}{4(a - b)}$$

$$2)\ \frac{16(a - b)}{(\sqrt{17a + b - x} - \sqrt{17b + a - x})^2} = \frac{2(a - b)}{3a + 3b - x}.$$

Hieraus erhält man, nachdem man in der ersten Gleichung mit $16(a - b)$ multiplicirt, in der zweiten mit $16(a - b)$ dividirt und jedesmal beide Seiten radicirt hat, die Gleichungen:

1. $\sqrt{17a + b - x} + \sqrt{17b + a - x} = 2\sqrt{3a + 3b + x}$

2. $\sqrt{17a + b - x} - \sqrt{17b + a - x} = 2\sqrt{2(3a + 3b - x)}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Ganz ebenso kann man mit der 13., 7. und 8. Darstellung von t bei (6) in Vb. verfahren. Man kommt auf dieselben Gleichungen, nur haben x und die zweite Quadratwurzel die entgegengesetzten Zeichen, was nicht in Betracht kommt.

Aus den Darstellungen von t bei (8) in Vb. hat man zunächst

$$\sqrt{\frac{7a - 9b + 3x}{7b - 9a + 3x}} = \frac{5a - 3b + x}{5b - 3a + x} = \frac{a - 3b + x}{3a - b - x}.$$

Hieraus folgt auf dem oben angegebenen Wege:

3. $\sqrt{7a - 9b + 3x} + \sqrt{7b - 9a + 3x} = 2\sqrt{a + b + x}$

4. $\sqrt{7a - 9b + 3x} - \sqrt{7b - 9a + 3x} = 2\sqrt{2(x - a - b)}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

In derselben Weise erhält man aus der 3., 4. und 11. Darstellung von t bei (17) in Vc. folgende Gleichungen:

5. $\sqrt{41a-9b-3x}+\sqrt{41b+9a-3x}=2\sqrt{5a+5b+x}$

6. $\sqrt{41a-9b-3x}-\sqrt{41b+9a-3x}=4\sqrt{5a-5b-x}$

L. $x=\sqrt{9a^2-82ab+9b^2}$.

Aus der symmetrischen Gleichung des 4. Grades

$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{2xy(x^2+y^2)}=\frac{a}{b}$$

findet man, wie unter 11) in Ic. angegeben ist, als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{r+a+2b}{r-a-2b}}=\sqrt{\frac{b-2a+2r}{b+2a-2r}}=\sqrt[4]{\frac{5r-3a+4b}{5r-3a-4b}}$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Durch Quadriren und korr. Add. erhält man, wenn man zugleich x statt r setzt,

$$(3)\quad \frac{\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}}{\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}}=\frac{x+a}{2b}=\frac{b}{2x-2a}.$$

Hieraus ergeben sich in der oben durchgeführten Weise:

7. $\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}=2\sqrt{x+a}$

8. $\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}=4\sqrt{x-a}$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Die vorletzte Gleichung stimmt mit 51 überein.

b. Sind im Zähler und Nenner des Radikanden von t_4, welches aus einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades abgeleitet ist, die Koefficienten von r nicht einander gleich, so kann man auch noch in der oben angegebenen Weise verfahren, aber die Rechnung wird ein wenig umständlicher.

Aus der 9., 3. und 4. Darstellung von t bei (10) in Vb. hat man, wenn man x statt r setzt,

$$(4)\quad \sqrt{\frac{3(5a+b-x)}{a+5b-x}}=\frac{7a-b+x}{3b-a+x}=\frac{5a+b-x}{x-a-b}$$

L. $x=\sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Durch korr. Add. hat man hier

$$(5)\quad \frac{\sqrt{3(5a+b-x)}+\sqrt{a+5b-x}}{\sqrt{3(5a+b-x)}-\sqrt{a+5b-x}} = \frac{3a+b+x}{4a-2b} = \frac{2a}{3a+b-x}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich wesentlich von den entsprechenden Gleichungen (2) und (3). In (2) und (3) ist der Nenner des ersten Quotienten rechts gleich dem Zähler des zweiten, wenigstens bis auf einen Zahlenfaktor, bei (2) steht dort $a - b$, in (3) steht b, und diese Gröſse ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor, gleich der Differenz der Radikanden links,

in (2): $(17a + b) - x) - (17b + a - x) = 16(a - b)$,

in (3): $(5x - 3a + 4b) - (5x - 3a - 4b) = 8b$.

Soll die Gleichung (5) für unsere Zwecke brauchbar sein, so müssen der 2. und der 3. Quotient so umgeformt werden, daſs der Nenner des ersten gleich dem Zähler des zweiten ist. Das geschieht mit Hülfe des KS. nach dem in Vg. und sonst schon mehrfach angewendeten Verfahren. Man erhält statt des 2. und 3. Quotienten in (5)

$$\frac{5a+b+x}{7a-b-x} = \frac{7a-b-x}{11a+7b-5x}$$

und daher aus (5):

$$1)\quad \frac{(\sqrt{3(5a+b-x)}+\sqrt{a+5b-x})^2}{2(7a-b-x)} = \frac{5a+b+x}{7a-b-x}$$

$$2)\quad \frac{2(7a-b-x)}{(\sqrt{3(5a+b-x)}-\sqrt{a+5b-x})^2} = \frac{7a-b-x}{11a+7b-5x}.$$

Mithin

9. $\sqrt{3(5a+b-x)} + \sqrt{a+5b-x} = \sqrt{2(5a+b+x)}$

10. $\sqrt{3(5a+b-x)} - \sqrt{a+5b-x} = \sqrt{2(11a+7b-5x)}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

In derselben Weise hat man aus den Darstellungen von t zu (18) in Vc.

$$\sqrt{\frac{3a-b-x}{a-3b+x}} = \frac{a+b+x}{a-3b+x} = \frac{3a-b-x}{a+b+x}$$

$$\frac{\sqrt{3a-b-x}+\sqrt{a-3b+x}}{\sqrt{3a-b-x}-\sqrt{a-3b+x}} = \frac{a-b+x}{2b} = \frac{2a}{a-b-x}.$$

Hieraus durch Umformung der beiden letzten Quotienten nach dem KS.

$$\frac{\sqrt{3a-b-x}+\sqrt{a-3b+x}}{\sqrt{3a-b-x}-\sqrt{a-3b+x}} = \frac{3a-b+x}{a+b-x} = \frac{a+b-x}{a-3b-x}.$$

Daher nach dem angegebenen Verfahren:

11. $\sqrt{3a-b-x}+\sqrt{a-3b+x} = \sqrt{2(3a-b+x)}$

12. $\sqrt{3a-b-x}-\sqrt{a-3b+x} = \sqrt{2(a-3b-x)}$

L. $x = \sqrt{a^2 - 6ab + b^2}$.

c. Der in b. angegebene Weg ist umständlicher als nötig ist. Man kann einen allgemeinen Weg einschlagen, der die in a. und b. behandelten Fälle zugleich in sich schliefst. Nach [I. 236] und nach Ec. mufs das Produkt aus dem Zähler und Nenner des Radikanden von t_4 stets ein vollständiges Quadrat sein. Das Quadrat läfst sich zwar aus den andern Darstellungen von t ableiten, läfst sich aber auch leicht direkt finden. Beides ist in Ic. gezeigt.

So findet man für die 11. Darstellung von t bei (6) in Vb., wenn man x statt r setzt,

$$(17a+b-x)(17b+a-x) = 9(a+b-x)^2.$$

Daher hat man einerseits durch Radicirung und Multiplikation mit 2, andrerseits identisch

$$(6)\quad \left.\begin{aligned} 2\sqrt{17a+b-x}\cdot\sqrt{17b+a-x} &= 6a+6b-6x \\ (17a+b-x)+(17b+a-x) &= 18a+18b-2x \end{aligned}\right|.$$

Bildet man erstens die Summe, zweitens die Differenz dieser Gleichungen und zieht jedesmal die Wurzeln, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{17a+b-x}+\sqrt{17b+a-x} &= 2\sqrt{2(3a+3b-x)} \\ \sqrt{17a+b-x}-\sqrt{17b+a-x} &= 2\sqrt{3a+3b+x} \end{aligned}\right|.$$

L. $x = \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Die beiden Gleichungen sind oben in 1 und 2 schon auf einem andern Wege gefunden. Die Verschiedenheit des Zeichens der zweiten Wurzel kommt nicht in Betracht. Sollte auch das Zeichen dieser Wurzel übereinstimmen, so hätte man bei der ersten Gleichung in (6) nach dem Ausziehen der Wurzel das negative Zeichen nehmen müssen.

Ebenso hat man für die 9. Darstellung bei (10) in Vc.

$$3(5a + b - x)(a + 5b - x) = (3a + 3b - 3x)^2$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + 10ab + b^2}.$$

Hieraus ähnlich, wie oben, zunächst

$$\left|\begin{array}{l} 2\sqrt{3(5a + b - x)} \cdot \sqrt{a + 5b - x} = 6a + 6b - 6x \\ 3(5a + b - x) + (a + 5b - x) = 16a + 8b - 4x \end{array}\right|.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich dann weiter die Gleichungen 9 und 10.

d. Auf einem der hier eben angegebenen Wege sind die meisten der vorangestellten Gleichungen entstanden, nur 46 ist direkt gebildet. Man hat identisch:

$$\left|\begin{array}{l} \sqrt{4a + b - 4\sqrt{ab}} = 2\sqrt{a} - \sqrt{b} \\ 2\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{b} \end{array}\right|.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander und setzt x statt $\sqrt{ab}$, so erhält man die Gleichung 46.

Auch für die Aufstellung anderer Gleichungen von der hier verlangten Form kann man in ähnlicher Weise verfahren. Für die Gleichung 48 hat man identisch

$$(\sqrt{a - b} + \sqrt{a}) + (3\sqrt{a - b} - \sqrt{a}) = 4\sqrt{a - b}.$$

Quadrirt man die links eingeklammerten Ausdrücke, zieht wieder die Wurzel und setzt x für $\sqrt{a(a-b)}$, so erhält man

$$\sqrt{2a - b + 2x} + \sqrt{10a - 9b - 6x} = 4\sqrt{a - b},$$

das ist die Gleichung 48. — In derselben Weise erhält man aus der identischen Gleichung

$$2(\sqrt{a+b} + \sqrt{a}) + (\sqrt{a+b} - 3\sqrt{a}) = (3\sqrt{a+b} - \sqrt{a})$$

die Gleichung 53, nämlich

$$2\sqrt{2a + b + 2x} + \sqrt{10a + b - 6x} = \sqrt{10a + 9b - 6x}.$$

Man hat jeden eingeklammerten Ausdruck zu quadriren, x statt $\sqrt{a(a + b)}$ zu setzen und über jedes Quadrat wieder die Quadratwurzel zu setzen.

Für die symmetrische Gleichung des 4. Grades

$$(7) \quad \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4} = \frac{a}{b}$$

erhält man als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{3a - 2b + 2r}{2b - a}} = \sqrt{\frac{2b - a}{3a - 2b - 2r}} = \sqrt[4]{\frac{3a - 2b + 2r}{3a - 2b - 2r}}$$

$$r = \sqrt{2a(a - b)}.$$

Hieraus nach c., indem man zugleich x statt r setzt,

13. $\sqrt{3a - 2b + 2x} + \sqrt{3a - 2b - 2x} = 2\sqrt{a}$

14. $\sqrt{3a - 2b + 2x} - \sqrt{3a - 2b - 2x} = 2\sqrt{2(a - b)}$

L. $x = \sqrt{2a(a - b)}$.

Die Gleichung 13 ist oben unter 47 aufgeführt.

Sucht man zu der symmetrischen Gleichung des vierten Grades

$$(8) \quad \frac{(x^2 + xy + y^2)^2}{(x^2 + y^2)(x + y)^2} = \frac{a}{b}$$

die Darstellungen von t, so erhält man:

$$\sqrt{\frac{4a - 3b + 4r}{9b - 8a}} = \sqrt{\frac{b}{4a - 3b - 4r}} = \sqrt{\frac{2a - b + 2r}{3b - 2a - 2r}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{3a - b + 2r}{10a - 9b - 6r}}, \quad r = \sqrt{a(a - b)}.$$

Hieraus ergeben sich nach c. die Gleichungen:

15. $\sqrt{2a - b + 2x} + \sqrt{10a - 9b - 6x} = 2\sqrt{2a - b - 2x}$

16. $\sqrt{2a - b + 2x} - \sqrt{10a - 9b - 6x} = 4\sqrt{a - b}$

L. $x = \sqrt{a(a - b)}$.

Die Gleichung 16 ist identisch mit der Gleichung 48, die Gleichung 15 mit 52, wenn man $-b$ statt b setzt.

Aus der Gleichung

$$(9) \quad \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}$$

findet man als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{3a - 2b + r}{2b - a + r}} = \sqrt{\frac{2a + b - 2r}{b - 2a + 2r}} = \sqrt{\frac{4a - 5b + 4r}{3b}}$$

$$= \sqrt{\frac{8a - 3b}{5b - 4a + 4r}} = \sqrt[4]{\frac{2a - 13b + 14r}{3(b - 2a + 2r)}}, \quad r = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Hieraus erhält man nach c. die Gleichungen:

17. $\sqrt{2a - 13b + 14x} + \sqrt{3(b - 2a + 2x)} = 2\sqrt{2a - b + 2x}$

18. $\sqrt{2a - 13b + 14x} - \sqrt{3(b - 2a + 2x)} = 4\sqrt{2x - a - b}$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Die Gleichung 17 ist identisch mit der Gleichung 54.

Aus der Gleichung

$$(10) \qquad \frac{xy(x + y)^2}{(x^2 - xy + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b} \text{ *)}$$

findet man als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{a + b + r}{2b}} = \sqrt{\frac{6a}{r - a - b}} = \sqrt{\frac{7a + b + r}{r - a + b}}$$

$$= \sqrt{\frac{5a - b - r}{r - a - 3b}} = \sqrt[4]{\frac{3(7a + b + r)}{a + 7b - r}}, \quad r = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}.$$

Hieraus nach c. die Gleichungen:

19. $\sqrt{3(7a + b + x)} + \sqrt{7b + a - x} = 2\sqrt{4a + 4b + 2x}$

20. $\sqrt{3(7a + b + x)} - \sqrt{7b + a - x} = 2\sqrt{7a + b - x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

Die Gleichung 20 ist identisch mit 55.

e. Aus den oben aufgestellten Gleichungen 1—20 ersehen wir, dafs die Gleichungen von der hier behandelten Form stets paarweise vorhanden sind. Gilt die Gleichung

$$(11) \quad \sqrt{\alpha a + \beta b + \gamma x} + \sqrt{\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x} = \sqrt{\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 x},$$

so mufs es stets drei einfache rationale Koefficienten α_3, β_3, γ_3 geben, dafs auch die Gleichung

$$(12) \quad \sqrt{\alpha a + \beta b + \gamma x} - \sqrt{\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x} = \sqrt{\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 x}$$

richtig ist, d. h. dieselbe Lösung hat.

---

*) Was den Ursprung dieser und der vorhergehenden symmetrischen Gleichungen des 4. Grades betrifft, so wurde bei der Ausarbeitung der „Algebraischen Gleichungen" eine sehr grofse Anzahl von symmetrischen Gleichungen des 4. Grades aufgestellt und aus jeder derselben wurden die Darstellungen von t entwickelt. Zu jenen gehören auch die hier angegebenen. Man kann jedoch, wie es in Ie. gezeigt ist, die betreffende symmetrische Gleichung des 4. Grades leicht aus der gegebenen Lösung der zu bildenden quadratischen Gleichung ableiten.

Legen wir die Gleichung (1) zum Grunde, setzen also der Kürze halber statt (11)

$$(13)\quad \sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C},$$

so ist, wie man durch Quadriren findet,

$$2\sqrt{AB}=C-A-B.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der identischen Gleichung

$$A+B=A+B$$

und zieht die Wurzel, so erhält man

$$(14)\quad \sqrt{A}-\sqrt{B}=\sqrt{2A+2B-C}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen; denn es mufs hiernach, wenn man für A, B und C die Werte aus (11) setzt und (14) mit (12) vergleicht, sein:

$$\alpha_3=2\alpha+2\alpha_1-\alpha_2$$
$$\beta_3=2\beta+2\beta_1-\beta_2$$
$$\gamma_3=2\gamma+2\gamma_1-\gamma_2.$$

Man kann daher aus einer Gleichung von der hier behandelten Form stets eine zweite von derselben Form ableiten, so aus der Gleichung (13) die Gleichung (14) oder

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\sqrt{D},\ \text{d. h.}$$
$$\sqrt{B}+\sqrt{D}=\sqrt{A}.$$

Aus dieser bildet man

$$\sqrt{B}-\sqrt{D}=\sqrt{E},\ \text{d. h.}$$
$$\sqrt{D}+\sqrt{E}=\sqrt{B};$$

aus dieser

$$\sqrt{D}-\sqrt{E}=\sqrt{F},\ \text{d. h.}$$
$$\sqrt{E}+\sqrt{F}=\sqrt{D}\ \text{u. s. w.}$$

Damit ist bewiesen:

Aus einer Gleichung von der Form

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{C}$$

kann man beliebig viele andere Gleichungen ableiten, welche dieselbe Form und dieselbe Lösung haben.

Es soll das speciell an ein paar Beispielen dargethan werden. Es soll eine Gleichung von der hier behandelten Form gegeben sein, und es sollen aus derselben andere abgeleitet werden, welche dieselbe Form und dieselbe Lösung haben.

Aus 51 hat man, wenn man $-a$ statt a setzt und das Zeichen der zweiten Wurzel negativ nimmt, da es das wahrscheinlichere ist,

$$(15)\quad \sqrt{5x+3a+4b} - \sqrt{5x+3a-4b} = 2\sqrt{x-a}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Nach dem angegebenen Verfahren findet man zunächst

$$(15_1)\quad \sqrt{5x+3a+4b} + \sqrt{5x+3a-4b} = 4\sqrt{x+a}.$$

Durch Addition und Subtraktion erhält man aus diesen beiden Gleichungen nach Vertauschung der Seiten:

$$(15_2)\quad 2\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a} = \sqrt{5x+3a+4b}$$

$$(15_3)\quad 2\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \sqrt{5x+3a-4b}.$$

Die letzte Gleichung ist identisch mit 49. — Aus (15_3) hat man durch Versetzung

$$\sqrt{5x+3a-4b} + \sqrt{x-a} = 2\sqrt{x+a}.$$

Nach dem angegebenen Verfahren findet man hieraus

$$(15_4)\quad \sqrt{5x+3a-4b} - \sqrt{x-a} = 2\sqrt{2(x-b)}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit 50. — Jetzt kann man weiter schliefsen

$$\sqrt{5x+3a-4b} - 2\sqrt{2(x-b)} = \sqrt{x-a}.$$

Hieraus

$$(15_5)\quad \sqrt{5x+3a-4b} + 2\sqrt{2(x-b)} = \sqrt{25x+7a-24b} \text{ etc.}$$

So sind aus der Gleichung (15) fünf andere abgeleitet, welche alle dieselbe Form und dieselbe Lösung haben.

Die Gleichung 52 heifst

$$(16)\quad \sqrt{10a+9b-6x} + \sqrt{2a+b+2x} = 2\sqrt{2a+b-2x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a(a+b)}.$$

Hierzu findet man zunächst

$$(16_1)\quad \sqrt{10a + 9b - 6x} - \sqrt{2a + b + 2x} = 4\sqrt{a + b}.$$

Aus beiden Gleichungen ergeben sich durch Addition und Subtraktion die neuen Gleichungen:

$$(16_2)\quad \sqrt{2a + b - 2x} + 2\sqrt{a + b} = \sqrt{10a + 9b - 6x}$$

$$(16_3)\quad \sqrt{2a + b - 2x} - 2\sqrt{a + b} = \sqrt{2a + b + 2x}.$$

Aus (16) hat man durch Umstellung

$$2\sqrt{2a + b - 2x} - \sqrt{2a + b + 2x} = \sqrt{10a + 9b - 6x}.$$

Hierzu findet man

$$(16_4)\quad 2\sqrt{2a + b - 2x} + \sqrt{2a + b + 2x} = \sqrt{10a + b - 6x}.$$

Die Summe und die Differenz der beiden letzten Gleichungen giebt:

$$(16_5)\quad \sqrt{10a + b - 6x} + \sqrt{10a + 9b - 6x} = 4\sqrt{2a + b - 2x}$$

$$(16_6)\quad \sqrt{10a + b - 6x} - \sqrt{10a + 9b - 6x} = 2\sqrt{2a + b + 2x} \text{ etc.}$$

Die Gleichungen 16—16_6 haben dieselbe Form und dieselbe Lösung. — Die Gleichung (16_6) ist identisch mit 53.

f. In c. ist gezeigt, dafs es, um Gleichungen von der hier verlangten Form zu bilden, nur darauf ankommt, eine Gleichung von der Form

$$(\alpha a + \beta b + \gamma x)(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 x) = (\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 x)^2$$

zu finden, d. h. eine Gleichung, in welcher ein Produkt durch ein Quadrat ausgedrückt ist. Solche Gleichungen sind jedoch in I. behandelt und in Menge aufgestellt worden. Man kann daher behaupten:

> Die hier behandelten Gleichungen sind nur eine andere Form der in I. behandelten Gleichungen, und aus jeder der in I. aufgestellten Gleichungen lassen sich direkt zwei Gleichungen von der hier verlangten Form hinschreiben.

Die Form der Gleichungen, welche in I. vorkommen, *ist*

$$(17)\quad AC = B^2.$$

Zieht man die Wurzel, multiplicirt mit 2, kombinirt die so erhaltene Gleichung durch Addition und Subtraktion mit der identischen Gleichung

$$A + C = A + C$$

und zieht jedesmal die Wurzel, so erhält man die Gleichungen:

$$(18) \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{A} + \sqrt{C} = \sqrt{A + C + 2B} \\ \sqrt{A} - \sqrt{C} = \sqrt{A + C - 2B} \end{array} \right|.$$

Die Gleichung [9] heifst

$$(a + 5b + x)(5a + b + 3x) = 4(a + 2b + x)^2$$

$$\text{L. } x = \sqrt{(a - b)(a + 11b)}.$$

Hier ist im Vergleich mit (17):

$$A = 5a + b + 3x \qquad B = 2a + 4b + 2x$$
$$C = a + 5b + x \qquad A + C = 6a + 6b + 4x.$$

Daher erhält man, den Gleichungen (18) entsprechend:

21. $\sqrt{5a + b + 3x} + \sqrt{a + 5b + x} = \sqrt{10a + 14b + 8x}$

22. $\sqrt{5a + b + 3x} - \sqrt{a + 5b + x} = \sqrt{2(a - b)}$

L. $x = \sqrt{a - b)(a + 11b)}$.

In derselben Weise hat man aus [10]:

23. $\sqrt{9a - 7b + 3x} + \sqrt{9b - 7a + 3x} = 2\sqrt{2(a + b + x)}$

24. $\sqrt{9a - 7b + 3x} - \sqrt{9b - 7a + 3x} = 2\sqrt{x - a - b}$

L. $x = \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}$.

Ebenso hat man aus den Gleichungen 6, 7 und 8 in Id. bezw. je zwei der folgenden Gleichungen:

25. $\sqrt{5x - 4a - 3b} + \sqrt{x + b} = 2\sqrt{2x - 2a}$

26. $\sqrt{5x - 4a - 3b} - \sqrt{x + b} = 2\sqrt{x - b}$

27. $\sqrt{5x - 4a + 3b} + \sqrt{13x - 12a - 5b} = 4\sqrt{2x - 2a}$

28. $\sqrt{5x - 4a + 3b} - \sqrt{13x - 12a - 5b} = 2\sqrt{x - b}$

29. $\sqrt{5x - 4a + 3b} + \sqrt{2x + 2a} = 3\sqrt{x + b}$

30. $\sqrt{5x - 4a + 3b} - \sqrt{2x + 2a} = \sqrt{5x - 4a - 3b}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ingleichen ergeben sich aus den Gleichungen 31 un[illegible]d 33 in Id. folgende Gleichungen:

31. $\sqrt{33a+81b+17x} + \sqrt{9a+57b-7x} = 4\sqrt{a+17b+\ldots x}$

32. $\sqrt{33a+81b+17x} - \sqrt{9a+57b-7x} = 2\sqrt{17a+b+\ldots -x}$

33. $\sqrt{81a+33b+17x} + \sqrt{57a+9b-7x} = 2\sqrt{17a+b+\ldots x}$

34. $\sqrt{81a+33b+17x} - \sqrt{57a+9b-7x} = 2\sqrt{17b+a+\ldots x}$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$. [u. s. w.

In I. ist gezeigt worden, dafs sich für jede vorh[illegible]er-bestimmte Lösung beliebig viele Gleichungen von der d[illegible]ort behandelten Form aufstellen lassen. Nach dem vorigen Sat[illegible]tze mufs daher auch der Satz gelten:

Für jede vorher bestimmte Lösung lassen si[illegible]ch beliebig viele Gleichungen von der hier b[illegible]be-handelten Form aufstellen.

Man bringt zu dem Zweck die durch die Lösung [illegible] ge-gebene Gleichung auf die in I. behandelte Form

$$(19) \quad AC = B^2.$$

Aus dieser Gleichung folgen zunächst die Gleichungen ([illegible]18) und aus diesen, wie in e. nachgewiesen, beliebig viele and[illegible]ere. Man kann aber die Gleichungen (14) auch verallgemein[illegible]ern. Aus (19) folgt zunächst

$$2mn\sqrt{AC} = 2mnB.$$

Kombinirt man diese Gleichung durch Addition und [illegible]ub-traktion mit der identischen Gleichung

$$m^2A + n^2C = m^2A + n^2C$$

und zieht jedesmal auf beiden Seiten die Wurzel, so er-hält man

$$(20) \quad \left| \begin{array}{l} m\sqrt{A} + n\sqrt{C} = \sqrt{m^2A + n^2C + 2mnB} \\ m\sqrt{A} - n\sqrt{C} = \sqrt{m^2A + n^2C - 2mnB} \end{array} \right|.$$

Für m und n kann man beliebige Zahlen setzen und so aus der einen Gleichung (19) beliebig viele Glei-chungen von der hier gewünschten Form bilden.

Man kann jedoch die Gleichungen noch viel allgemeiner machen. Nach der Transformationsformel III in I. hat man aus (19) ganz allgemein

$$(21)\ (m^2A+2mnB+n^2C)(p^2A+2pqB+q^2C)$$
$$=(mpA+(np+mq)B+nqC)^2.$$

Behandelt man diese Gleichung, wie oben die Gleichung (17) behandelt ist, so erhält man, den Gleichungen (18) entsprechend, die beiden folgenden allgemeinen Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \sqrt{m^2A+2mnB+n^2C}+\sqrt{p^2A+2pqB+q^2C}$$
$$=\sqrt{(m+p)^2A+2(m+p)(n+q)B+(n+q)^2C}$$
$$\text{II.}\quad \sqrt{m^2A+2mnB+n^2C}-\sqrt{p^2A+2pqB+q^2C}$$
$$=\sqrt{(m-p)^2A+2(m-p)(n-q)B+(n-q)^2C}.$$

Setzt man der Kürze wegen nach (21):

$$m^2A+2mnB+n^2C=A_1$$
$$p^2A+2pqB+q^2C=C_1$$
$$mpA+(np+mq)B+nqC=B_1,$$

so erhält man, wie aus I. und II. folgt, aus der Gleichung (17) oder (19) statt der Gleichungen (18) die Gleichungen:

$$\sqrt{A_1}+\sqrt{C_1}=\sqrt{A_1+C_1+2B_1}$$
$$\sqrt{A_1}-\sqrt{C_1}=\sqrt{A_1+C_1-2B_1}\ .$$

Die Gleichungen I. und II. sind die allgemeinsten Darstellungen der Gleichung (19) in der hier verlangten Form. Sie repräsentiren, da m, n, p und q ganz beliebige Zahlen sind, unendlich viele Gleichungen, welche dieselbe Form und dieselbe Lösung haben.

Es möge das an einigen Beispielen erläutert werden. Wir nehmen die Lösungen als gegeben an.

Es sei als Lösung

$$1)\quad x=\sqrt{ab}$$

gegeben. Dann hat man sofort

$$x^2=ab.$$

Im Vergleich mit (19) ist hier:

$$A=a,\quad B=x,\quad C=b.$$

Die Gleichungen I. und II. gehen über in:

35. $\sqrt{m^2a + 2mnx + n^2b} + \sqrt{p^2a + 2pqx + q^2b}$
$= \sqrt{(m+p)^2a + 2(m+p)(n+q)x + (n+q)^2b}$

36. $\sqrt{m^2a + 2mnx + n^2b} - \sqrt{p^2a + 2pqx + q^2b}$
$= \sqrt{(m-p)^2a + 2(m-p)(n-q)x + (n-q)^2b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Setzt man hierin für m, n, p, q bezw. 1) 2, -1, 2, -2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 3, 1, -1, 3, so erhält man entsprechend je zwei der folgenden Gleichungen:

37. $\sqrt{4a + b - 4x} + 2\sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{16a + 9b - 24x}$

38. $\sqrt{4a + b - 4x} - 2\sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{b}$

39. $\sqrt{9a + b + 6x} + \sqrt{9b + a + 6x} = 4\sqrt{a + b + 2x}$

40. $\sqrt{9a + b + 6x} - \sqrt{9b + a + 6x} = 2\sqrt{a + b - 2x}$.

41. $\sqrt{9a + b + 6x} + \sqrt{9b + a - 6x} = 2\sqrt{a + 4b + 4x}$

42. $\sqrt{9a + b + 6x} - \sqrt{9b + a - 6x} = 2\sqrt{4a + b - 4x}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Die Gleichung 38 stimmt mit der Gleichung 46 überein.

Alle hier bisher aufgestellten Gleichungen, wie auch die folgenden derselben Art, kann man nach (20) auch so umformen, dafs die links stehenden Quadratwurzeln beliebige Faktoren bei sich haben. So kann man mit Hülfe von (20), indem man m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 3, 2; 3) 2, 3 setzt, aus 37 (oder 38) folgende Gleichungen bilden:

43. $2\sqrt{4a + b - 4x} + \sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{25a + 9b - 30x}$

44. $2\sqrt{4a + b - 4x} - \sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{9a + b - 6x}$

45. $3\sqrt{4a + b - 4x} + 2\sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{64a + 25b - 80x}$

46. $3\sqrt{4a + b - 4x} - 2\sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{16a + b - 8x}$

47. $2\sqrt{4a + b - 4x} + 3\sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{49a + 25b - 70x}$

48. $2\sqrt{4a + b - 4x} - 3\sqrt{a + b - 2x} = \sqrt{a + b + 2x}$

L. $x = \sqrt{ab}$. [u. s. w.

Man findet nämlich aus 37 (oder 38) zunächst

$$\sqrt{4a+b-4x}\cdot\sqrt{a+b-2x}=2a+b-3x.$$

Diese Gleichung ist mit $2mn$ zu multipliciren, durch Addition und Subtraktion mit der identischen Gleichung

$$m^2(4a+b-4x)+n^2(a+b-2x)=m^2(4a+b-4x)+n^2(a+b-2x)$$

zu verbinden und zu radiciren. Das giebt

$$m\sqrt{4a+b-4x}\pm n\sqrt{a+b-2x}$$
$$=\sqrt{m^2(4a+b-4x)+n^2(a+b-2x)\pm 2mn(2a+b-3x)}.$$

Hierin sind für m und n die angegebenen Werte zu setzen.

Es sei als Lösung

$$2)\quad x=\sqrt{a^2+b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$(x+a)(x-a)=b^2.$$

Wegen (19) ist also:

$$A=x+a,\quad B=b,\quad C=x-a.$$

Setzt man dies in I. und II. und für m, n, p, q bezw. 1) 2, -1, 0, 1; 2) 1, 2, 1, -2, so erhält man:

49. $\sqrt{5x+3a-4b}+\sqrt{x-a}=2\sqrt{x+a}$

50. $\sqrt{5x+3a-4b}-\sqrt{x-a}=2\sqrt{2(x-b)}$

51. $\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}=2\sqrt{x+a}$

52. $\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}=4\sqrt{x-a}$ u. s. w.

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

Es sei als Lösung

$$3)\quad x=\sqrt{a^2-b^2}$$

gegeben. Dann hat man

$$(a+b)(a-b)=x^2.$$

Es ist also

$$A=a+b,\quad B=x,\quad C=a-b.$$

Setzt man dies in I. und II. und zugleich für m, n, p, q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 2, 2, 3, so erhält man:

53. $\sqrt{5a+3b+4x}+\sqrt{5a-3b+4x}=3\sqrt{2(a+x)}$

54. $\sqrt{5a+3b+4x}-\sqrt{5a-3b+4x}=\sqrt{2(a-x)}$

55. $\sqrt{13a+5b+12x}+\sqrt{13a-5b+12x}=5\sqrt{2(a+x)}$

56. $\sqrt{13a+5b+12x}-\sqrt{13a-5b+12x}=\sqrt{2(a-x)}$ u. s. w.

L. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

Übrigens gelten die für die vorhergehende Lösung aufgestellten Gleichungen auch für diese Lösung, wenn man dort a und x vertauscht. Umgekehrt gelten die hier aufgestellten Gleichungen auch für die vorhergehende Lösung, wenn man a und x vertauscht.

Wie man aus einer gegebenen Lösung eine Gleichung von der Form (19) ableitet, ist in Ig. und sonst mehrfach gezeigt.

g. Es ist hier noch eine Frage zu erledigen, die von einigem Interesse ist. Oben ist gesagt, dafs die meisten der hier aufgeführten Gleichungen aus symmetrischen Gleichungen des vierten Grades abgeleitet sind, und gezeigt, wie das geschieht. Es liegt daher die Frage nahe:

> Wenn eine Gleichung von der hier behandelten Form gegeben ist, wie findet man die symmetrische Gleichung des vierten Grades, aus welcher man dieselbe ableiten kann?

Wir wollen das an zwei Beispielen zeigen. Es sei erstens die Gleichung 54 gegeben,

$$\sqrt{2a-13b+14x}+\sqrt{3(b-2a+2x)}=2\sqrt{2a-b+2x}$$

$$\text{L. } x=\sqrt{a^2-ab+b^2}.$$

Nach den oben in a., b. und c. gemachten Auseinandersetzungen müssen die beiden ersten Radikanden, wenn man r statt x setzt, Zähler und Nenner des Radikanden von t_4 sein, welches man aus der zugehörigen symmetrischen Gleichung des vierten Grades ableitet. Das Produkt derselben mufs ein Quadrat sein. Quadrirt man die gegebene Gleichung, isolirt die noch bleibende Wurzel und quadrirt wieder, so erhält man, wenn man r statt x setzt,

$$(2a-13b+14r)\cdot 3(b-2a+2r)=(6a+3b-6r)^2$$

$$\frac{2a-13b+14r}{6a+3b-6r}=\frac{6a+3b-6r}{3(b-2a+2r)}.$$

Diese Quotienten hat man $= t^2$, d. h. $= \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$ zu setzen, r zu eliminiren und $\frac{a}{b}$ zu suchen. Man hat, indem man nach dem KS. erstens r im Nenner, zweitens im Zähler fortschafft,

$$\frac{4a - 5b + 4r}{3b} = \frac{8a - 3b}{5b - 4a + 4r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

Eliminirt man hieraus r nach If., so erhält man leicht

$$\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)(x - y)^2} = \frac{a}{b}, \text{ vgl. (9).}$$

Aus dieser Gleichung findet man dann umgekehrt wieder als Darstellungen von t:

$$\sqrt{\frac{4a - 5b + 4r}{3b}} = \sqrt{\frac{8a - 3b}{5b - 4a + 4r}} = \sqrt[4]{\frac{2a - 13b + 14r}{3(b - 2a + 2r)}}$$

$$r = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Es sei **zweitens** die Gleichung 55 gegeben,

$$\sqrt{3(7a + b + x)} - \sqrt{a + 7b - x} = 2\sqrt{7a + b - x}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}.$

Man findet hier zunächst

$$3(7a + b + r) \cdot (a + 7b - r) = 9(r - a + b)^2.$$

Wir setzen daher

$$\frac{3(7a + b + r)}{3(r - a + b)} = \frac{3(r - a + b)}{a + 7b - r} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

Hieraus nach dem KS.

$$\frac{a + b + r}{2b} = \frac{6a}{r - a - b} = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2.$$

Eliminirt man hieraus r nach If. und bestimmt $\frac{a}{b}$, so erhält man die oben aufgeführte Gleichung (10).

h. Da sich alle **vollständigen quadratischen** Gleichungen, wie in Ii. gezeigt ist, auf die in I. behandelte Form bringen lassen, so müssen sie sich auch auf die hier behandelte Form bringen lassen. In I. sind unter 72—74 die Gleichungen entwickelt:

$$(a + b - 2x)(9a + b - 10x) = (2x - 3a + b)^2$$

$$(a + 9b - 10x)(a + 25b - 26x) = (a + 15b - 16x)^2$$

$$(a + 9b - 10x)(a + 49b - 50x) = (a - 21b + 20x)^2$$

L. $x = a, b.$

Nach dem in f. erörterten Verfahren kann man aus jeder dieser Gleichung sofort zwei Gleichungen von der hier verlangten Form hinschreiben. Man erhält:

57. $\sqrt{a+b-2x}+\sqrt{9a+b-10x}=2\sqrt{a+b-2x}$

58. $\sqrt{a+b-2x}-\sqrt{9a+b-10x}=4\sqrt{a-x}$

59. $\sqrt{a+9b-10x}+\sqrt{a+25b-26x}=2\sqrt{a+16b-17x}$

60. $\sqrt{a+9b-10x}-\sqrt{a+25b-26x}=2\sqrt{b-x}$

61. $\sqrt{a+9b-10x}+\sqrt{a+49b-50x}=2\sqrt{a+4b-5x}$

62. $\sqrt{a+9b-10x}-\sqrt{a+49b-50x}=10\sqrt{b-x}$

L. $x=a,\ b$.

Die erste Gleichung hat durch diese Transformation eine Wurzel verloren, die Wurzel $x=b$. Wie durch Transformation einer Gleichung leicht eine neue Wurzel hinzukommen kann, so kann durch Transformation auch leicht eine Wurzel aus der Gleichung verschwinden. Das gleichzeitige Bestehen der durch Transformation entstandenen und der ursprünglichen Gleichung hat nur darin seinen Grund, dafs beide Gleichungen mindestens eine Wurzel gemeinsam haben, d. h. durch einen Wert von x gleichzeitig erfüllt werden. Das Verschwinden einer Wurzel wird dann eintreten, wenn die Mehrdeutigkeit einer Gröfse nicht genügend in Anschlag gebracht ist. Setzt man in der Gleichung 57 der rechts stehenden Wurzel das doppelte Zeichen $\pm$ vor, so erscheint auch die Wurzel $x=b$ wieder. Bei den folgenden Gleichungen ist das doppelte Zeichen ohne Einflufs, nur bei der ersten, weil hier rechts dieselbe Wurzelgröfse steht, welche schon links steht, die Gleichung also eigentlich nur zwei Wurzelgröfsen enthält anstatt drei.

Aus der in I. 76 aufgestellten allgemeinen Gleichung erhält man:

63. $\sqrt{m^2a+n^2b-(m^2+n^2)x}+\sqrt{p^2a+q^2b-(p^2+q^2)x}$
$$=\sqrt{(m+p)^2a+(n+q)^2b-((m+p)^2+(n+q)^2)x}$$

L. $x=a,\ b$.

Setzt man hierin für m, n, p, q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 3, 1, 1, 3; 3) 7, 1, 4, 6, so erhält man:

64. $\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}=3\sqrt{a+b-2x}$

65. $\sqrt{9a+b-10x}+\sqrt{9b+a-10x}=4\sqrt{a+b-2x}$

66. $\sqrt{49a+b-50x}+2\sqrt{4a+9b-13x}$

$$=\sqrt{121a+49b-170x}.$$

L. $x=a, b$.

Diese Gleichungen sind unter [130_1—130_3] aufgeführt.

Aus den Gleichungen 57—66 kann man nun Gleichungen von der hier behandelten Form mit beliebigen andern Wurzeln bilden, indem man für a und b diese Wurzeln setzt, oder man kann solche Gleichungen nach dem in f. angegebenen Verfahren aus den in I. 77—89 entwickelten Gleichungen durch Transformation herleiten.

XIII. $\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{C}{D}$.

227. $\frac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}}=\frac{x+3a}{x-a}$

L. $x=-a, a\sqrt{2}$.

228. $\frac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}}=\frac{x+a+2b}{x+a-2b}$

L. $x=-a, \sqrt{a^2+b^2}$.

229. $\frac{\sqrt{a+b+x}-\sqrt{a+b-x}}{\sqrt{a+b+x}+\sqrt{a+b-x}}=\frac{x-a}{a+2b-x}$

L. $x=a+b, \sqrt{a^2+2ab}$.

a. Die hier vorgeführten Gleichungen sind kubisch. Sie haben die Form

$$(1)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{C}{D}.$$

Gleichungen dieser Art lassen sich sehr leicht aus den Darstellungen von t hinschreiben, welche aus symmetrischen Gleichungen des vierten Grades entwickelt sind. Man hat nur t_4 gleich irgend einem andern t und x statt r zu setzen, zu quadriren und korr. Add. anzuwenden, so ist die Gleichung fertig. Aus den Darstellungen von t bei (3) in I. kann man z. B. hinschreiben, wenn man $-x$ statt r setzt:

$$\sqrt{\frac{3(5a+b-x)}{5b+a-x}}=\frac{5a+b-x}{a+b-x}$$

$$(2)\quad \sqrt{\frac{3(5a+b-x)}{5b+a-x}}=\frac{7a-b+x}{a-3b-x}$$

$$\sqrt{\frac{3(5a+b-x)}{5b+a-x}}=\frac{6a}{a-b-x}.$$

Hieraus bezw. durch einfache korr. Add.

1. $$\frac{\sqrt{3(5a+b-x)}+\sqrt{5b+a-x}}{\sqrt{3(5a+b-x)}-\sqrt{5b+a-x}}=\frac{3a+b-x}{2a}$$

L. $x=5a+b,\ \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

2. $$\frac{\sqrt{3(5a+b-x)}+\sqrt{5b+a-x}}{\sqrt{3(5a+b-x)}-\sqrt{5b+a-x}}=\frac{4a-2b}{3a+b+x}$$

L. $x=17a-11b,\ \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

3. $$\frac{\sqrt{3(5a+b-x)}+\sqrt{5b+a-x}}{\sqrt{3(5a+b-x)}-\sqrt{5b+a-x}}=\frac{7a-b-x}{5a+b-x}$$

L. $a=7a-b,\ \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

In derselben Weise ergeben sich aus der 1. und 4. Darstellung von t bei (5) in I. und aus der 3. und 6. Darstellung bei (6) in I. die Gleichungen:

4. $$\frac{\sqrt{5a+b+3x}+\sqrt{5b+a+x}}{\sqrt{5a+b+3x}-\sqrt{5b+a+x}}=\frac{x-a+13b}{x-a+b}$$

L. $x=a-19b,\ \sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

5. $$\frac{\sqrt{2(x-b)}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2(x-b)}-\sqrt{x-a}}=\frac{a+b+x}{3a-b-x}$$

L. $x=2a-b,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

Aus einer Gleichung von der Form

$$(3)\quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{C}{D}$$

ist hier oben stets gebildet

$$(4)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C+D}{C-D}.$$

Man kann durch korr. Add. aber auch allgemein bilden

$$(5)\quad \frac{m\sqrt{A}+n\sqrt{B}}{p\sqrt{A}+q\sqrt{B}} = \frac{mC+nD}{pC+qD}.$$

So erhält man z. B. aus der ersten Gleichung bei (2) für $m=2$, $n=3$, $p=3$, $q=2$ die Gleichung

6. $$\frac{2\sqrt{3(5a+b-x)}+3\sqrt{5b+a-x}}{3\sqrt{3(5a+b-x)}+2\sqrt{5b+a-x}} = \frac{13a+5b-5x}{17a+5b-5x}$$

L. $x = 5a+b,\ \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Die Lösung kann keine andere sein, als die zu der Gleichung 1 gehörige oder als die der ersten Gleichung in (2).

So kann man aus jeder der bei (2) aufgestellten Gleichungen beliebig viele andere von der hier verlangten Form ableiten.

Wählt man die 1. und 5. Darstellung von t in I. bei (7), so hat man zunächst

$$(6)\quad \sqrt{\frac{5a+12b+13x}{5a-12b+13x}} = \frac{3a+2b+3x}{3a-2b+3x}$$

und hieraus

7. $$\frac{\sqrt{5a+12b+13x}+\sqrt{5a-12b+13x}}{\sqrt{5a+12b+13x}-\sqrt{5a-12b+13x}} = \frac{3(a+x)}{2b}$$

L. $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

Die Gleichung ist quadratisch, wenn man nicht die Wurzel $x = \infty$ in Anrechnung bringen will. Daſs die Gleichung 7 quadratisch ist, folgt aus der Gleichung (6). Hier muſs sich x^3 fortheben. So muſs sich auch aus der Gleichsetzung der 3. und 11. Darstellung von t bei (17) in Vc. eine quadratische Gleichung ergeben. Man erhält nach dem angegebenen Verfahren

8. $$\frac{\sqrt{41a+9b-3x}+\sqrt{41b+9a-3x}}{\sqrt{41a+9b-3x}-\sqrt{41b+9a-3x}}=\frac{5a+5b+x}{8(a-b)}$$

L. $x=\sqrt{9a^2+82ab+9b^2}$.

Auch die in VII. vorkommenden Gleichungen können leicht auf die hier verlangte Form gebracht werden. Man zieht die Wurzel und erhält eine Gleichung von der Form (3), die dann durch korr. Add. nach (4) oder (5) leicht auf die hier verlangte Form gebracht werden kann. Diese Gleichungen werden sämmtlich quadratisch. So erhält man aus [33], [33_1], [33_3], die vorn in VII. angegeben sind, und aus der 2. und 4. Gleichung in VIIa. bezw. folgende Gleichungen:

9. $$\frac{\sqrt{7a-9b+3x}+\sqrt{7b-9a+3x}}{\sqrt{7a-9b+3x}-\sqrt{7b-9a+3x}}=\frac{a+b+x}{4(a-b)}$$

L. $x=\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

10. $$\frac{2\sqrt{17a+b+x}-\sqrt{17b+a+x}}{2\sqrt{17b+a+x}-\sqrt{17a+b+x}}=\frac{x+9a-3b}{x+9b-3a}$$

L. $x=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

11. $$\frac{3\sqrt{6x+9a+b}-\sqrt{6x+9b+a}}{3\sqrt{6x+9b+a}-\sqrt{6x+9a+b}}=\frac{x+a}{x+b}$$

L. $x=\sqrt{ab}$.

12. $$\frac{\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}}{\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}}=\frac{a+x}{2b}$$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

13. $$\frac{\sqrt{5a+4b-3x}+\sqrt{5a-4b-3x}}{\sqrt{5a+4b-3x}-\sqrt{5a-4b-3x}}=\frac{a+x}{2b}$$

L. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

b. Am einfachsten lassen sich Gleichungen von der voranstehenden Form aus den in I. behandelten Gleichungen bilden. Die Gleichungen in I. haben die Form

$$(7) \quad AC=B^2.$$

Dividirt man diese Gleichung in die identische Gleichung $A^2=A^2$ und radicirt, so erhält man

$$\text{XIII b.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{C}{D}.$$

$$(8)\quad \sqrt{\frac{A}{C}}=\frac{A}{B}.$$

Hieraus durch korr. Add.

$$(9)\quad \frac{m\sqrt{A}+n\sqrt{C}}{p\sqrt{A}+q\sqrt{C}}=\frac{mA+nB}{pA+qB}.$$

Hier ist zu den beiden Wurzeln, welche die Gleichung (7) liefert, eine dritte hinzugekommen, welche die Gleichung $A=0$ liefert; denn auch $A=0$ genügt der Gleichung (8) und folglich auch der Gleichung (9).

Statt (8) kann man aus (7) auch bilden

$$(10)\quad \sqrt{\frac{A}{C}}=\frac{B}{C},$$

indem man die Gleichung (7) durch C^2 dividirt und radicirt. Aus (10) folgt dann weiter

$$(11)\quad \frac{m\sqrt{A}+n\sqrt{C}}{p\sqrt{A}+q\sqrt{C}}=\frac{mB+nC}{pB+qC}$$

L. 1) $C=0$, 2) $AC=B^2$.

Die einfachsten Fälle der Gleichungen (9) und (11) sind

$$(12)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}}=\frac{A+B}{A-B}$$

L. 1) $A=0$, 2) $AC=B^2$.

$$(13)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}}=\frac{B+C}{B-C}$$

L. 1) $C=0$, 2) $AC=B^2$.

In (12) ist zu der Gleichung (7), von der wir ausgegangen sind, noch die Gleichung $A=0$, in (13) noch die Gleichung $C=0$ hinzugekommen.

Nehmen wir Beispiels halber die Gleichung

$$(x+a)(x-a)=b^2$$

L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$,

so ist nach (7) hier

$$A=x+a,\quad C=x-a,\quad B=b.$$

$$\text{XIIIb.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{C}{D}.$$

Wir bilden nach (8) oder (10) zunächst

$$\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}=\frac{x+a}{b}\ \text{oder}=\frac{b}{x-a}$$

und erhalten bezw. nach (12) und (13):

14. $\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\dfrac{x+a+b}{x+a-b}$

L. $x=-a,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

15. $\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\dfrac{b-a+x}{b+a-x}$

L. $x=a,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

Nehmen wir die Gleichung [10]

$$(9a-7b+3x)(9b-7a+3x)=(3a+3b+x)^2,$$

so ist

$A=9a-7b+3x,\ C=9b-7a+3x,\ B=3a+3b+x.$

Dann hat man nach (8) zunächst

$$(14)\quad \sqrt{\frac{9a-7b+3x}{9b-7a+3x}}=\frac{9a-7b+3x}{3a+3b+x}.$$

Hieraus kann man nach (9) durch korr. Add. viele andere Gleichungen ableiten, welche die hier verlangte Form haben, z. B.

16. $\dfrac{\sqrt{9a-7b+3x}+\sqrt{9b-7a+3x}}{\sqrt{9a-7b+3x}-\sqrt{9b-7a+3x}}=\dfrac{6a-2b+2x}{3a-5b+x}$

17. $\dfrac{3\sqrt{9a-7b+3x}+7\sqrt{9b-7a+3x}}{3\sqrt{9b-7a+3x}-\sqrt{9a-7b+3x}}=\dfrac{3a+x}{b}$ u. s. w.

L. $x=\dfrac{7b-9a}{3},\ \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

Die Lösung kann keine andere sein, als die der Gleichung (14).

Für die Lösung

$$x=\sqrt{a^2+b^2}$$

sind unter 6, 7 und 8 in I. die Gleichungen aufgestellt:

1) $(5x-4a+3b)(x-b)=(2a+b-x)^2$

2) $(5x-4a+3b)(13x-12a-5b)=(7x-8a+b)^2$

3) $(5x+4a+3b)(2x-2a)=(x-a+3b)^2$.

In 1) ist $-b$ statt b, in 3) $-a$ statt a gesetzt. — Aus diesen Gleichungen kann man nach dem angegebenen Verfahren die folgenden Gleichungen hinschreiben. Die ersten beiden sind aus 1), die letzten beiden bezw. aus 2) und 3) abgeleitet, 18, 19 und 21 nach (10), 20 nach (8).

18. $$\frac{\sqrt{5x-4a+3b}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{5x-4a+3b}-\sqrt{x-b}}=\frac{a}{a+b-x}$$

19. $$\frac{\sqrt{5x-4a+3b}+2\sqrt{x-b}}{\sqrt{5x-4a+3b}-2\sqrt{x-b}}=\frac{2a-b+x}{2a+3b-3x}$$

L. $x=b,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

20. $$\frac{\sqrt{5x-4a+3b}+\sqrt{13x-12a-5b}}{\sqrt{5x-4a+3b}-\sqrt{13x-12a-5b}}=\frac{6x-6a+2b}{2a+b-x}$$

L. $x=\frac{4a-3b}{5},\ \sqrt{a^2+b^2}$.

21. $$\frac{\sqrt{5x+4a+3b}+\sqrt{2x-2a}}{\sqrt{5x+4a+3b}-\sqrt{2x-2a}}=\frac{3(x-a+b)}{a+3b-x}$$

L. $x=a,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

In I. kommen weiter unter 25, 30, 53, 62, 66, 72, 73, 81 und 87 folgende Gleichungen vor:

1) $(x+a+b)(x-a-b)=8(a-b)^2$
2) $(3a+3b+x)(3a+3b-x)=8(a-b)^2$
3) $(a+b+2x)(a-2b+2x)=(2a-b+x)^2$
4) $(13a+12b-5x)(5a+4b-3x)=(8a+7b-4x)^2$
5) $(4a+9b-12x)(a+4b-4x)=(2a+6b-7x)^2$
6) $(9a+b-10x)(a+b-2x)=(2x-3a+b)^2$
7) $(a+25b-26x)(a+9b-10x)=(a+15b-16x)^2$
8) $(13x-13a+12b)(5x-5a+4b)=(8x-8a+7b)^2$
9) $(21-10x)(53-26x)=(33-16x)^2$

In 5) ist $-x$ statt x gesetzt. Aus diesen Gleichungen erhält man nach dem oben angegebenen Verfahren, wenn man überall nur einfache korr. Add. anwendet, also (12) oder (13) benutzt, folgende Gleichungen von der hier verlangten Form:

22. $\frac{\sqrt{2(x+a+b)}+\sqrt{x-a-b}}{\sqrt{2(x+a+b)}-\sqrt{x-a-b}}=\frac{3a-5b+x}{5a-3b-x}$

L. $x=a+b$, $\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

23. $\frac{\sqrt{2(3a+3b+x)}+\sqrt{3a+3b-x}}{\sqrt{2(3a+3b+x)}-\sqrt{3a+3b-x}}=\frac{7a-b-x}{a-7b+x}$

L. $x=3(a+b)$, $\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

24. $\frac{\sqrt{a+b+2x}+\sqrt{a-2b+2x}}{\sqrt{a+b+2x}-\sqrt{a-2b+2x}}=\frac{3(x+a)}{x-a+2b}$

L. $x=-\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

25. $\frac{\sqrt{13a+12b-5x}+\sqrt{5a+4b-3x}}{\sqrt{13a+12b-5x}-\sqrt{5a+4b-3x}}=\frac{13a+11b-7x}{3a+3b-x}$

L. $x=\frac{5a+4b}{3}$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

26. $\frac{\sqrt{4a+9b-12x}+\sqrt{a+4b-4x}}{\sqrt{4a+9b-12x}-\sqrt{a+4b-4x}}=\frac{3a+10b-11x}{a+2b-3x}$

L. $x=\frac{a+4b}{4}$, $\sqrt{ab}$.

27. $\frac{\sqrt{9a+b-10x}+\sqrt{a+b-2x}}{\sqrt{9a+b-10x}-\sqrt{a+b-2x}}=\frac{a-b}{2(a-x)}$

L. $x=\frac{a+b}{2}$, a, b.

28. $\frac{\sqrt{a+25b-26x}+\sqrt{a+9b-10x}}{\sqrt{a+25b-26x}-\sqrt{a+9b-10x}}=\frac{a+12b-13x}{3(b-x)}$

L. $x=\frac{a+9b}{10}$, a, b.

29. $\frac{\sqrt{13x-13a+12b}+\sqrt{5x-5a+4b}}{\sqrt{13x-13a+12b}-\sqrt{5x-5a+4b}}=\frac{13x-13a+11b}{3(x-a+b)}$

L. $x=\frac{5a-4b}{5}$, $a+b$, $a-b$.

30. $\frac{\sqrt{21-10x}+\sqrt{53-26x}}{\sqrt{21-10x}+\sqrt{53-26x}}=\frac{27-13x}{3x-6}$

L. $x=\frac{21}{10}$, 3, 2.

Auch die oben zu Anfang dieses Abschnitts vorgeführten Gleichungen sind nach dem hier in b. angegebenen Verfahren gebildet worden. So ist 227 zusammengesetzt aus

1) $(x+a)(x-a)=a^2$, 2) $x+a=0$.

Man erhält nach (8) zunächst

$$\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}=\frac{x+a}{a}$$

und hieraus nach (9) für $m=1$, $n=2$, $p=1$, $q=-2$ die Gleichung 227.

Der Gleichung 228 liegt dieselbe Gleichung zum Grunde, wie der oben entwickelten Gleichung 14.

Die Gleichung 229 ist zusammengesetzt aus

1) $(a+b+x)(a+b-x)=b^2$, 2) $a+b-x=0$.

Sie ist formirt nach (13).

Auch die Gleichung [225] kann auf diesem Wege sehr leicht abgeleitet werden. Man setzt sie zusammen aus den Gleichungen:

1) $(a-x)(x-b)=(x-b)^2$, 2) $a-x=0$.

Das giebt nach (8) und (12):

$$\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}=\frac{a-x}{x-b}$$

$$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}=\frac{a-b}{a+b-2x};$$

$$\text{L. } x=a,\ b,\ \frac{a+b}{2}.$$

Alle hier in b. aufgestellten kubischen Gleichungen unterscheiden sich übrigens hinsichtlich ihrer Auflösung wesentlich von den in a. aufgestellten, wie sich die Gleichungen (8) und (10) wesentlich von der Gleichung (3) unterscheiden. Die Gleichungen (8) und (10) sind gleich an ihrer Form als zerlegbar zu erkennen; für (8) genügt $A=0$, für (10) genügt $C=0$. Die in a. entwickelten Gleichungen sind allgemeinerer Natur. Sie lassen auch immer eine Zerlegung zu, doch ist diese nur in besonderen Fällen, wie bei den Gleichungen 1 und 6, welche aus der ersten Gleichung bei (2) abgeleitet sind, leicht zu erkennen. Man mufs alle Wurzeln fortschaffen, die Gleichung ordnen und kann erst dann an die Zerlegung gehen. Bei den in b. entwickelten kubischen Gleichungen giebt immer eine der links stehenden Quadratwurzeln, gleich Null gesetzt, eine Lösung der Gleichung; bei den in a. entwickelten Gleichungen ist dies, die Gleichungen 1 und 6 ausgenommen, nicht der Fall.

XIV. $\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{C}{D}}$.

230. $\frac{\sqrt{5x-7a}+\sqrt{x+a}}{\sqrt{5x-7a}-\sqrt{x+a}}=\sqrt{\frac{2x+a}{x-4a}}$

L. $x=a,\ \frac{1}{2}a(3+\sqrt{41})$.

231. $\frac{\sqrt{2a+x}+\sqrt{3(2a-x)}}{\sqrt{2a+x}-\sqrt{3(2a-x)}}=\sqrt{\frac{2a+x}{2(a-x)}}$

L. $x=4a,\ \pm a$.

232. $\frac{\sqrt{7a+x}-\sqrt{3(a-x)}}{\sqrt{7a+x}+\sqrt{3(a-x)}}=\sqrt{\frac{a+x}{2(2a-x)}}$

L. $x=5a,\ \pm a$.

233. $\frac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{5x+a}{5x-7a}}$

L. $x=\frac{3}{5}a,\ a\sqrt{2}$.

234. $\frac{\sqrt{4a+b-4x}-\sqrt{b}}{\sqrt{4a+b-4x}+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+b-2x}{a}}$

L. $x=\frac{2a+b}{2},\ \sqrt{ab}$.

235. $\frac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{5x-3a+4b}{5x-3a-4b}}$

L. $x=\frac{3}{5}a,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

236. $\frac{\sqrt{3a-4b+5x}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{3a-4b+5x}-\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{x+a}{2(x-b)}}$

L. $x=\frac{2b-a}{3},\ \sqrt{a^2+b^2}$.

237. $\frac{\sqrt{3(7a+b-x)}-\sqrt{7b+a+x}}{\sqrt{3(7a+b-x)}+\sqrt{7b+a+x}}=\sqrt{\frac{7a+b+x}{4a+4b-2x}}$

L. $x=11a+5b,\ \sqrt{a^2+14ab+b^2}$.

238. $\frac{\sqrt{14x+2a+13b}+\sqrt{3(2x-2a-b)}}{\sqrt{14x+2a+13b}-\sqrt{3(2x-2a-b)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+2a+b}{2x-a+b}}$

L. $x=\frac{2a-5b}{10},\ \sqrt{a^2+ab+b^2}$.

a. Diese Gleichungen haben die Form

$$(1)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{C}{D}}.$$

Sie lassen sich am einfachsten aus den in XII. behandelten Gleichungen ableiten. Von diesen ist dort nachgewiesen, dafs sie immer paarweise vorhanden sind. Dividirt man zwei solcher zusammengehörigen Gleichungen durch einander, so entsteht eine Gleichung von der hier verlangten Form. Die so gebildete neue Gleichung mufs dieselben Wurzeln haben, welche die beiden ursprünglichen Gleichungen hatten, enthält aber meistens noch eine dritte Wurzel und ist daher kubisch.

Die Gleichung [46] heifst mit Umstellung des zweiten und dritten Gliedes

$$\sqrt{4a+b-4x}-\sqrt{b}=2\sqrt{a+b-2x}$$
L. $x=\sqrt{ab}$.

Hierzu findet man nach XII. leicht

$$\sqrt{4a+b-4x}+\sqrt{b}=2\sqrt{a}.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch einander, so erhält man die Gleichung 234. Es kommt dann als dritte Wurzel noch $x=\frac{1}{2}(2a+b)$ hinzu.

Bildet man von den Gleichungen 7 und 8 in XII. die Summe und Differenz und dividirt die erhaltenen Gleichungen durch einander, so giebt das 235.

Ebenso ergiebt sich 236 aus [49] und [50]; 237 aus [55] und der zugehörigen Gleichung, oder aus 19 und 20 in XII., wenn man $-x$ statt x setzt; 238 aus [54] und der zugehörigen Gleichung, oder aus 17 und 18 in XII., wenn man $-b$ statt b setzt.

In derselben Weise lassen sich aus den in XII. paarweise aufgestellten Gleichungen, nämlich aus 1) 1 und 2, 2) 3 und 4, 3) 7 und 8, 4) 9 und 10, 5) 11 und 12 durch einfache Division bezw. ableiten:

1. $$\frac{\sqrt{17a+b-x}+\sqrt{17b+a-x}}{\sqrt{17a+b-x}-\sqrt{17b+a-x}}=\sqrt{\frac{3a+3b+x}{2(3a+3b-x)}}$$

L. $x=9(a+b)$, $\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

2. $$\frac{\sqrt{7a-9b+3x}+\sqrt{7b-9a+3x}}{\sqrt{7a-9b+3x}-\sqrt{7b-9a+3x}}=\sqrt{\frac{x+a+b}{2(x-a-b)}}$$

L. $x=\frac{1}{3}(a+b)$, $\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

3. $$\frac{\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}}{\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$$

L. $x=\frac{5}{3}a$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

4. $$\frac{\sqrt{3(5a+b-x)}+\sqrt{5b+a-x}}{\sqrt{3(5a+b-x)}-\sqrt{5b+a-x}}=\sqrt{\frac{5a+b+x}{11a+7b-5x}}$$

L. $x=4a+2b$, $\sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

5. $$\frac{\sqrt{3a-b-x}+\sqrt{a-3b+x}}{\sqrt{3a-b-x}-\sqrt{a-3b+x}}=\sqrt{\frac{3a-b+x}{a-3b-x}}$$

L. $x=\sqrt{a^2-6ab+b^2}$.

b. Alle oben vorgeführten und entwickelten Gleichungen, 230 ausgenommen, haben zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen und eine dritte ungleiche Wurzel. Die beiden ersten Wurzeln können rational sein, wie in 431 und 432, oder irrational, wie bei den übrigen Gleichungen. Die dritte Wurzel ist stets rational. Es lassen sich jedoch auch leicht Gleichungen dieser Art aufstellen, welche drei ungleiche rationale Wurzeln haben. So hat man aus den Gleichungen 57 und 58, 59 und 60, 61 und 62 in XII. durch einfache Division bezw. folgende Gleichungen:

6. $\frac{\sqrt{a+b-2x}+\sqrt{9a+b-10x}}{\sqrt{a+b-2x}-\sqrt{9a+b-10x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b-2x}{a-x}}$

L. $x = a,\ b,\ \frac{5a+b}{6}$.

7. $\frac{\sqrt{a+9b-10x}+\sqrt{a+25b-26x}}{\sqrt{a+9b-10x}-\sqrt{a+25b-26x}} = \sqrt{\frac{a+16b-17x}{b-x}}$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a+17b}{18}$.

8. $\frac{\sqrt{a+9b-10x}+\sqrt{a+49b-50x}}{\sqrt{a+9b-10x}-\sqrt{a+49b-50x}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{a+4b-5x}{b-x}}$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a+29b}{30}$.

Alle diese Gleichungen, wie ihre Wurzeln auch beschaffen sein mögen, hahen die Eigentümlichkeit:

Die Summe des links stehenden Radikanden ist, abgesehen von einem möglicher Weise vorkommenden Zahlenfaktor, gleich der Summe der rechts stehenden Radikanden.

So hat man für 230, 231 und 238 bezw.

1) $(5x - 7a) + (x + a) = 2((2x + a) + (x - 4a))$

2) $(2a + x) + 3(2a - x) = 2((2a + x) + 2(a - x))$

3) $(14x + 2a + 13b) + 3(2x - 2a - b)$
$= 2((2x + 2a + b) + 4(2x - a + b))$.

Der Beweis für die angegebene Eigentümlichkeit liegt in der Bildung der Gleichungen. Die Gleichungen sind sämmtlich entstanden aus zwei Gleichungen von der Form:

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} \sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} = \sqrt{D} \end{array} \right|,$$

welche dieselbe Lösung haben. Diese sind durch einander dividirt. Dann erhält man die Gleichung (1). Quadrirt man nun die Gleichungen in (2), so ergiebt die Summe

$$(3) \quad 2(A + B) = C + D,$$

womit für die allgemeine Gleichung (1) der Satz bewiesen ist.

$$\text{XIV b.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{C}{D}}.$$

Diese Eigentümlichkeit giebt ein Mittel an die Hand, bei einer solchen Gleichung die dritte Wurzel sofort zu erkennen:

> Man hat die Summe der links oder rechts stehenden Radikanden zu bilden und diese gleich 0 zu setzen, so giebt der zugehörige Wert von x die dritte Wurzel.

Steht ein Faktor vor der Wurzel, so mufs er vor der Bildung der Summe der Radikanden erst unter die Wurzel gebracht werden, damit die Gleichung genau die in (1) angegebene Form hat. — So hat man zur Auffindung der dritten Wurzel für die Gleichungen 230, 233, 234, 236 und 238 bezw.

1) $(2x+a)+(x-4a)=0$, d. h. $x=a$

2) $(5x+a)+(5x-7a)=0$, d. h. $x=\frac{3}{5}a$

3) $(a+b-2x)+a=0$, d. h. $x=\frac{2a+b}{2}$

4) $(x+a)+2(x-b)=0$, d. h. $x=\frac{2b-a}{3}$

5) $(2x+2a+b)+4(2x-a+b)=0$, d.h. $x=\frac{2a-5b}{10}$ etc.

Fällt in einer solchen Gleichung die Unbekannte fort, so ist die Gleichung quadratisch; sie hat keine dritte Wurzel, oder man mufs die dritte Wurzel $=\infty$ setzen. So hätte man für die oben aufgestellte Gleichung 5 zu setzen

$$(3a-b+x)+(a-3b-x)=0.$$

Das geht nicht, da x sich forthebt, wenn man nicht $x=\infty$ gelten lassen will. Die Gleichung läfst sich bei gehöriger Umformung durch den Faktor $(3a-b+x)+(a-3b-x)$ $=4(a-b)$ heben. Die Gleichung wird erfüllt durch $b=a$, unabhängig von x. Den Faktor darf man nicht $=0$ setzen, da er kein x enthält. Die Gleichung ist quadratisch.

c. Die in b. gezeigte Eigentümlichkeit der hier behandelten Gleichungen giebt ein Mittel an die Hand, solche Gleichungen in beliebiger Anzahl aufzustellen, besonders aus den in I. vorkommenden Gleichungen.

Die Differenz der Quadrate der Gleichungen (2) giebt

$$(4) \quad 4\sqrt{AB}=C-D.$$

Man hat also, wenn man quadrirt, eine Gleichung von der in I. behandelten Art, wie man umgekehrt durch Radiciren aus jeder Gleichung der in I. behandelten Art eine Gleichung von der Form (4) erhält. Kombinirt man mit der Gleichung (4) die Gleichung (3)

$$(5) \quad A+B=\frac{C+D}{2}$$

durch Addition und Subtraktion, zieht jedesmal die Wurzel und dividirt die so gewonnenen Gleichungen durch einander, so erhält man

$$\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{3C-D}{3D-C}},$$

d. h. eine Gleichung von der hier verlangten Form, deren Lösungen nach (3) und (4) durch die Partialgleichungen

$$1)\ A+B=0,\quad 2)\ 4AB=(C-D)^2$$

gegeben sind.

Die Gleichung [9]

$$(a+5b+x)(5a+b+3x)=(2a+4b+2x)^2$$

$$\text{L. } x=\sqrt{(a-b)(a+11b)}$$

hat die in I. behandelte Form. Daraus folgt nach (4)

$$2\sqrt{(a+5b+x)(5a+b+3x)}=4a+8b+4x.$$

Hiermit ist durch Addition und Subtraktion nach (5) zu kombiniren

$$(5a+b+3x)+(5b+a+x)=6a+6b+4x.$$

Dann erhält man nach dem angegebenen Verfahren

9. $$\frac{\sqrt{5a+b+3x}+\sqrt{a+5b+x}}{\sqrt{5a+b+3x}-\sqrt{a+5b+x}}=\sqrt{\frac{5a+7b+4x}{a-b}}$$

L. $x=-\frac{3}{2}(a+b),\ \sqrt{(a-b)(a+11b)}.$

Die dritte Wurzel ergiebt sich sofort aus der Gleichung

$$(5a+7b+4x)+(a-b)=0.$$

XIV c. $\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{C}{D}}$.

In I. kommen unter 6, 19, 44, 48, 75 die Gleichungen v

1) $(5x-4a-3b)(x+b)=(x-2a+b)^2$

2) $(5a+49b+x)(11a+7b-5x)=(a+17b-7$

3) $(13a+12b+5x)(37a+12b-35x)$
$=(15a+20b-9x)^2$

4) $(9a+b+6x)(a+25b-10x)=(14x-3a+5b)^2$

5) $(9a+25b-34x)(9a+49b-58x)$
$=(9a-35b+26x)^2$.

Aus diesen ergeben sich nach dem oben erörterten und durchgeführten Verfahren bezw. folgende Gleichungen von der hier verlangten Form:

10. $\frac{\sqrt{5x-4a-3b}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{5x-4a-3b}-\sqrt{x+b}}=\sqrt{\frac{2(x-a)}{x-b}}$

L. $x=\frac{2a+b}{3}$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

11. $\frac{\sqrt{5a+49b+x}+\sqrt{11a+7b-5x}}{\sqrt{5a+49b+x}-\sqrt{11a+7b-5x}}=\sqrt{\frac{9(a+5b-x)}{7a+11b+5x}}$

L. $x=4a+14b$, $\sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

12. $\frac{\sqrt{13a+12b+5x}+\sqrt{37a+12b-35x}}{\sqrt{13a+12b+5x}-\sqrt{37a+12b-35x}}=\sqrt{\frac{4(5a+4b-3x)}{5a-4b-3x}}$

L. $x=\frac{25a+12b}{15}$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

13. $\frac{\sqrt{9a+b+6x}+\sqrt{a+25b-10x}}{\sqrt{9a+b+6x}-\sqrt{a+25b-10x}}=\sqrt{\frac{a+9b+6x}{4(a+b-2x)}}$

L. $x=\frac{5a+13b}{2}$, $\sqrt{ab}$.

14. $\frac{\sqrt{9a+25b-34x}+\sqrt{9a+49b-58x}}{\sqrt{9a+25b-34x}-\sqrt{9a+49b-58x}}=\sqrt{\frac{9a+b-10x}{36(b-x)}}$

L. $x=\frac{9a+37b}{46}$, a, b.

Auf dem hier in c. angegebenen Wege lassen sich auch die Gleichungen 230—233 leicht ableiten. So geht man für die Gleichung 231 von der Gleichung aus

$$(2a+x)(2a-x)=3x^2$$
L. $x=\pm a$.

Dann hat man weiter

$$(2a+x)\cdot 3(2a-x)=9x^2$$

$$2\sqrt{(2a+x)\cdot 3(2a-x)}=6x.$$

Diese Gleichung, kombinirt mit der identischen

$$(2a+x)+3(2a-x)=8a-2x,$$

giebt

$$\sqrt{2a+x}+\sqrt{3(2a-x)}=2\sqrt{2a+x} \text{ u. s. w.}$$

Bei der Gleichung 230 mufs man ausgehen von der Gleichung

$$(5x-7a)(x+a)=(x+5a)^2.$$

Diese Gleichung hat zwar die Form der in I. behandelten Gleichungen, doch sind die Wurzeln irrational und ungleich. Der Ursprung der Gleichung ist unklar.

d. Auch aus den Darstellungen von t, die sich aus symmetrischen Gleichungen des 4. Grades ergeben, lassen sich leicht Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten. So hat man aus der 11., 3. und 4. Darstellung von t bei (6) in V.

$$(6)\quad \sqrt{\frac{17a+b-x}{17b+a-x}}=\frac{5a+b-x}{x-a-5b}=\frac{7a-b+x}{7b-a+x}.$$

Hieraus folgt durch korr. Add.

$$(7)\quad \frac{\sqrt{17a+b-x}+\sqrt{17b+a-x}}{\sqrt{17a+b-x}-\sqrt{17b+a-x}}=\frac{2(a-b)}{3a+3b-x}=\frac{3a+3b+x}{4(a-b)}.$$

Multiplicirt man die letzten beiden Quotienten mit einander und zieht die Wurzel aus dem Produkt, so erhält man eine gleichwertige Gröfse und daher die Gleichung, welche oben unter 1 auf andere Weise entwickelt ist.

Ähnlich hat man aus den Darstellungen von t bei (45) in I e.

$$(8)\quad \sqrt{\frac{9a+b+6x}{a+25b-10x}}=\frac{b+3x}{5b-x}=\frac{x+3a}{5x-a}$$

$$(9)\quad \frac{\sqrt{9a+b+6x}+\sqrt{a+25b-10x}}{\sqrt{9a+b+6x}-\sqrt{a+25b-10x}}=\frac{3b+x}{2x-2b}=\frac{3x+a}{2a-2x}.$$

In (7) waren der zweite und dritte Quotient so geformt, dafs der Nenner des einen gleich dem Zähler des andern war, wenigstens bis auf einen Zahlenfaktor. Bei der Multiplikation der Quotienten hob sich daher die Gröfse a — fort. In (9) ist dies nicht der Fall. Nach dem schon oft angewandten und besonders in Vg. erörterten Verfahren kann man mit Hülfe des KS. den zweiten und dritten Quotienten in (9) leicht so umformen, dafs der Nenner des einen gleich dem Zähler des andern wird. Man erhält die gleichwertigen Quotienten:

$$(10)\quad \frac{2a-6b+4x}{4a+4b-8x}=\frac{a+9b+6x}{2a-6b+4x}=\sqrt{\frac{a+9b+6x}{4a+4b-8x}}$$

und daher aus (9) und (10) die Gleichung

$$\textbf{15.}\quad \frac{\sqrt{9a+b+6x}+\sqrt{a+25b-10x}}{\sqrt{9a+b+6x}-\sqrt{a+25b-10x}}=\sqrt{\frac{a+9b+6x}{4a+4b-8x}}$$

L. $x=\frac{5a+13b}{2}$, $\sqrt{ab}$.

Auf diesem Wege sind wahrscheinlich die meisten der oben vorangestellten Gleichungen entstanden.

e. Bei allen hier vorkommenden Gleichungen steht links im Zähler die Summe, im Nenner die Differenz derselben Wurzelgröfsen. Die oben zur Aufstellung dieser Gleichungen angegebenen Methoden lassen sich in ähnlicher Weise, wie es bei (9) in XIII. geschehen ist, leicht dahin erweitern, dafs man Gleichungen erhält, in welchen die links vorkommenden Wurzelgröfsen beliebige Zahlenfaktoren bei sich haben. Der Charakter der Gleichungen wird dadurch kein anderer und die Auflösung wird dadurch nicht wesentlich erschwert.

So hat man aus der Gleichung (6) durch korr. Add.

$$(11)\quad \frac{2\sqrt{17a+b-x}+\sqrt{17b+a-x}}{2\sqrt{17b+a-x}+\sqrt{17a+b-x}}=\frac{9a-3b-x}{3a-9b+x}=\frac{13a+5b+3x}{5a+13b+3x}.$$

Für die letzten beiden Quotienten erhält man nach Vg. die gleichwertigen

$$(12)\quad \frac{21a+21b+11x}{9a+57b+7x}=\frac{57a+9b+7x}{21a+21b+11x}=\sqrt{\frac{57a+9b+7x}{57b+9a+7x}}$$

Daher erhält man aus (11) und (12)

16. $$\frac{2\sqrt{17a + b - x} + \sqrt{17b + a - x}}{2\sqrt{17b + a - x} + \sqrt{17a + b - x}} = \sqrt{\frac{57a + 9b + 7x}{57b + 9a + 7x}}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

Aus der Gleichung (8) hat man durch korr. Add.

$$\frac{2\sqrt{9a + b + 6x} - \sqrt{a + 25b - 10x}}{3\sqrt{a + 25b - 10x} - \sqrt{9a + b + 6x}} = \frac{7x - 3b}{14b - 6x} = \frac{7a - 3x}{14x - 6a}.$$

Man findet nach Vg. die gleichwertigen Quotienten

$$\frac{116x - 42a - 42b}{36a + 196b - 168x} = \frac{49a + 9b - 42x}{116x - 42a - 42b} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{49a + 9b - 42x}{49b + 9a - 42x}}$$

und hat daher die Gleichung

17. $$\frac{2\sqrt{9a + b + 6x} - \sqrt{a + 25b - 10x}}{3\sqrt{a + 25b - 10x} - \sqrt{9a + b + 6x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{49a + 9b - 42x}{49b + 9a - 42x}}.$$

L. $x = \frac{73b - 15a}{42}$, $\sqrt{ab}$.

Allgemein ist bei (19) und (20) in XII. gezeigt, dafs man aus einer Gleichung

$$(13) \quad AC = B^2,$$

wie sie in I. behandelt sind, eine Gleichung von der Form

$$(14) \quad m\sqrt{A} + n\sqrt{C} = \sqrt{m^2A + n^2C + 2mnB}$$

ableiten kann. Man kann daher aus (13) auch ebenso gut bilden

$$(15) \quad p\sqrt{A} + q\sqrt{C} = \sqrt{p^2A + q^2C + 2pqB}.$$

Dividirt man die Gleichungen (14) und (15) durch einander, so erhält man

18. $$\frac{m\sqrt{A} + n\sqrt{C}}{p\sqrt{A} + q\sqrt{C}} = \sqrt{\frac{m^2A + n^2C + 2mnB}{p^2A + q^2C + 2pqB}}$$

L. 1) $Amp = Cnq$; 2) $AC = B^2$.

Nimmt man z. B. für die Gleichung (13)

$$1) \quad (a + x)(a - x) = b^2,$$

so dafs also

$$A = a + x, \quad C = a - x, \quad B = b$$

ist, und setzt für m, n, p, q bezw. 1) 3, 1, 1, 3; 2) 3, 2, 2, 3, so erhält man aus (18):

$$19.\quad \frac{3\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{3\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}}=\sqrt{\frac{5a+3b+4x}{5a+3b-4x}}$$

$$20.\quad \frac{3\sqrt{a+x}+2\sqrt{a-x}}{3\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}}=\sqrt{\frac{13a+12b+5x}{13a+12b-5x}}$$

L. $x=0,\ \sqrt{a^2-b^2}$.

Nimmt man für die Gleichung (13)

2) $(a+b+2x)(a-2b+2x)=(2a-b+x)^2$,

welche in I. 53 aufgeführt ist, so ist

$A=a+b+2x,\ C=a-2b+2x,\ B=2a-b+x$.

Hieraus erhält man nach 18, wenn man für m, n, p, q die schon oben angewendeten Werte setzt:

$$21.\quad \frac{3\sqrt{a+b+2x}+\sqrt{a-2b+2x}}{3\sqrt{a-2b+2x}+\sqrt{a+b+2x}}=\sqrt{\frac{22a+b+26x}{22a-23b+26x}}$$

$$22.\quad \frac{3\sqrt{a+b+2x}+2\sqrt{a-2b+2x}}{3\sqrt{a-2b+2x}+2\sqrt{a+b+2x}}=\sqrt{\frac{37a-11b+38x}{37a-26b+38x}}$$

L. $x=\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

Bei allen in diesem Abschnitt vorkommenden Gleichungen stehen links dieselben Wurzelgröfsen. Ständen links verschiedene Wurzelgröfsen im Nenner und Zähler, so würde die Gleichung nicht mehr als quadratische Gleichung lösbar sein. So stehen in I. unter 11 und 13 die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l}(5x+4a-3b)(17x-8a-15b)=(7x+2a-9b)^2\\(5x+4a-3b)(13x-12a+5b)=(4a+7b-x)^2\end{array}\right|.$$

Beide haben dieselbe Lösung

$$x=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Aus den beiden angeführten Gleichungen erhält man nach dem mehrfach angewendeten Verfahren:

$$\left|\begin{array}{l}\sqrt{5x+4a-3b}+\sqrt{17x-8a-15b}=6\sqrt{x-b}\\\sqrt{5x+4a-3b}+\sqrt{13x-12a+5b}=4\sqrt{x+b}\end{array}\right|.$$

$$\text{XVa.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{D}{E}}\,.$$

Jede dieser Gleichungen hat noch dieselbe angegebene Lösung. Dividirt man sie jedoch durch einander, so erhält man

$$\frac{\sqrt{5x+4a-3b}+\sqrt{17x-8a-15b}}{\sqrt{5x+4a-3b}+\sqrt{13x-12a+5b}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-b}{x+b}}\,.$$

Dieser Gleichung wird zwar genügt durch

$$x=\sqrt{a^2+b^2},$$

sie ist aber vom 8. Grade. Scheidet man die beiden angegebenen Wurzeln aus, so bleibt immer noch eine Gleichung vom 6. Grade zu lösen übrig.

$$\text{XV.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{D}{E}}\,.$$

239. $\dfrac{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}-\sqrt{x-a}}=\sqrt{\dfrac{x+a+c}{x+a-c}}$

L. $x=\pm a,\ \sqrt{a^2+c^2}$.

239_1. $\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}=\sqrt[4]{\dfrac{x+c}{x-c}}$

L. $x=0,\ a,\ \sqrt{a^2+c^2}$.

239_2. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{c}}{\sqrt{x-b}+\sqrt{c}}=\sqrt[4]{\dfrac{a-x}{x-b}}$

L. $x=\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2-4c^2}$.

a. Diese Gleichungen lassen sich nicht auf dieselbe allgemeine Form bringen. Sie sind ihrer Form und ihrer Entstehung nach nur ähnlich. Sie haben manche Eigenschaften gemeinsam und sind daher in einen Abschnitt gebracht. Da man nach XII. die Summe und Differenz zweier Quadratwurzeln durch eine Quadratwurzel ausdrücken kann, so ist 239_2 mit 239_1 verwandt, wenn man in 239_1 links die Differenz zweier Quadratwurzeln durch eine Quadratwurzel ersetzt denkt.

$$\text{XV a.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}}=\sqrt[4]{\frac{D}{E}}\,.$$

Die Gleichungen 239 und 239_1 haben vier Wurzeln, sind also nicht mehr kubisch. Schafft man alle Wurzeln fort, so kommt man sogar auf Gleichungen 12. Grades. Man erhält bezw.

$$239.\quad (x^2-a^2)^4\cdot(a^2+c^2-x^2)^2=0,$$

$$239_1.\quad x^4(x-a)^4\cdot(a^2+c^2-x^2)^2=0.$$

Zieht man links die Wurzeln, so bleiben die Gleichungen vom 6. Grade, und man sollte daher als Lösung eigentlich schreiben:

$$239.\quad x=\pm a,\ \pm a,\ \sqrt{a^2+c^2},$$

$$239_1.\quad x=0,\ 0,\ a,\ a,\ \sqrt{a^2+c^2}.$$

Die Gleichungen haben, genau genommen, zwei Paare gleicher Wurzeln.

Die Gleichungen nähern sich ihrer Form und ihrer Entstehung nach den in XIII. und XIV. behandelten Gleichungen. Sie lassen sich, wie jene, am einfachsten aus den in I. vorkommenden Gleichungen ableiten.

Dividirt man die identische Gleichung

$$(1)\quad (x+a)^2=(x+a)^2$$

durch die Gleichung

$$(2)\quad x^2-a^2=c^2,$$

welche die in I. behandelte Form hat, und radicirt, so giebt das

$$(3)\quad \sqrt{\frac{x+a}{x-x}}=\frac{x+a}{c}\,,\ \text{vgl. (8) in XIII.}$$

Die Lösungen dieser Gleichung müssen wegen ihrer Zusammensetzung aus (1) und (2) durch

$$1)\ x+a=0,\quad 2)\ x^2-a^2=c^2$$

gegeben sein. Durch korr. Add. erhält man aus (3)

$$(4)\quad \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\frac{x+a+c}{x+a-c}\,.$$

Schafft man nun links erstens die Wurzeln aus dem Nenner fort, zweitens aus dem Zähler und radicirt, so erhält man

$$(5)\quad \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{x+a+c}{x+a-c}}\,.$$

$$\text{XVa.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}}=\sqrt[4]{\frac{D}{E}}\,.$$

Wendet man auf die beiden ersten Quotienten den KS. mit Addition an und setzt den gewonnenen gleichwertigen Quotienten gleich dem dritten, so erhält man die Gleichung 239. Wendet man auf die beiden ersten Quotienten den KS. mit Subtraktion an und setzt den gewonnenen Quotienten gleich dem dritten, so erhält man:

$$1.\quad \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x+a}+\sqrt{2a}}=\sqrt{\frac{x+a+c}{x+a-c}}$$

L. $x=\pm a,\ \sqrt{a^2+c^2}$.

Legt man statt der Gleichung (3) die Gleichung

$$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\frac{a-x}{m}$$

zum Grunde, so kommt man auf dem angegebenen Wege zu der Gleichung

$$2.\quad \frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}+\sqrt{2x}}=\sqrt{\frac{m+a-x}{m-a+x}}$$

L. $x=a,\ a,\ \sqrt{a^2-m^2}$.

Um auf die Gleichung 239_1 zu kommen, mufs man von der Gleichung

$$(6)\quad \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{c}$$

ausgehen, welche aus den Partialgleichungen

$$1)\ x=0,\quad 2)\ (x+a)(x-a)=c^2$$

zusammengesetzt ist, also hinsichtlich der Zusammensetzung der Gleichung (3) ähnlich ist. Wendet man auf (6) einfache korr. Add. an und erweitert den Quotienten links mit 2, so ist der Zähler sowohl als der Nenner ein Quadrat. Man erhält dann durch Radicirung

$$(7)\quad \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\sqrt{\frac{x+c}{x-c}}\,.$$

Hieraus ergiebt nach dem bei (4) angewendeten Verfahren

$$(8)\quad \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}=\sqrt[4]{\frac{x+c}{x-c}}\,.$$

$$\text{XV b.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{D}{E}}\,.$$

Daher erhält man, indem man auf die beiden ersten Quotienten den KS. mit Subtraktion anwendet, die Gleichung 239_1. Wendet man den KS. mit Addition an, so erhält man

$$3.\quad \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}+\sqrt{2a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}+\sqrt{2a}}=\sqrt[4]{\frac{x+c}{x-c}}$$

L. $x=0,\ a,\ \sqrt{a^2+c^2}$.

b. Man kann auch leicht allgemeine Gleichungen dieser Art aufstellen. Man geht von der in I. behandelten Form aus. Darnach hat man

$$(9)\quad AC=B^2$$

und hieraus weiter, wie bei (8) und (12) in XIII,

$$(10)\quad \sqrt{\frac{A}{C}}=\frac{A}{B}$$

$$(11)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}}=\frac{A+B}{A-B}\,.$$

Hieraus, wie (5) aus (4) entwickelt ist,

$$\frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{\sqrt{A-C}}=\frac{\sqrt{A-C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}$$

und daher endlich nach dem KS. mit Addition

$$\text{I.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}+\sqrt{A-C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}+\sqrt{A-C}}=\sqrt{\frac{A+B}{A-B}}\,.$$

Die Lösung liegt in den drei Partialgleichungen:

1) $A=0$, 2) $C=0$, 3) $AC=B^2$.

Die erste und dritte folgen aus der Gleichung (10), aus welcher die allgemeine Gleichung I entwickelt ist. Quadrirt man die Gleichung I beiderseits, so erhält man

$$\frac{(\sqrt{A}+\sqrt{A-C})\,(\sqrt{A}+\sqrt{C})}{(\sqrt{A}+\sqrt{A-C})\,(\sqrt{A}-\sqrt{C})}=\frac{A+B}{A-B}\,.$$

Man ist daher auch berechtigt zu setzen

$$\sqrt{A}+\sqrt{A-C}=0,\ \text{d. h. } C=0.$$

$$\text{XV b.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{D}{E}}\,.$$

Statt der Gleichung (10) kann man aus der Gleichung (9) auch die Gleichung

$$(12)\quad \sqrt{\frac{A}{C}}=\frac{B}{C}$$

zunächst ableiten. Aus dieser folgt dann

$$(13)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}}=\frac{B+C}{B-C}$$

und hieraus nach dem oben angewendeten Verfahren die zweite allgemeine Gleichung

$$\text{II.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}+\sqrt{A-C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}+\sqrt{A-C}}=\sqrt{\frac{B+C}{B-C}}$$

L. 1) $C=0$, 2) $C=0$, 3) $AC=B^2$.

Die erste und dritte Lösung ergeben sich aus der Gleichung (12). Quadrirt man, so findet man leicht, wie oben, dafs auch

$$\sqrt{A}+\sqrt{A-C}=0,\ \text{d. h.}\ C=0$$

der Gleichung genügt. Die Gleichung II hat daher stets zwei gleiche Wurzeln. Die Gleichung 2 ist ein specieller Fall der Gleichung II.

Die Gleichungen I und II sind allgemeine Formen der Gleichungen 239 und der Gleichung 2. Sie gelten immer, wie auch die Gröfsen A, B, C beschaffen sein mögen. Die Lösungen sind stets durch die drei dort angeführten Partialgleichungen gegeben. Die Gleichungen bleiben immer quadratisch lösbar, wenn A, B, C lineare Ausdrücke von x sind. Dann haben sie vier Wurzeln. Sie sind quadratisch nicht mehr lösbar, wenn nur eine der Gröfsen A oder C vom zweiten Grade ist; sonst mufs sich die dritte Partialgleichung zerlegen lassen.

Um die Gleichung 239 aufzustellen, mufsten wir erst eine Gleichung von der Form (11) oder (13) entwickeln. Diese Gleichungen haben aber die Form der in XIII. vorkommenden Gleichungen. Aus den Gleichungen in XIII. müssen sich daher auch Gleichungen von der Form 239 und von der Form 2 ableiten lassen.

$$\text{XV b.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{D}{E}}.$$

So erhält man aus den in XIII. angeführten Gleichungen 228, 229 und 5 bezw.

4. $$\frac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}+\sqrt{5a-3x}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}+\sqrt{5a-3x}}=\sqrt{\frac{x+a+2b}{x+a-2b}}$$

L. $x=\pm a,\ \sqrt{a^2+b^2}.$

5. $$\frac{\sqrt{a+b+x}-\sqrt{a+b-x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{a+b+x}+\sqrt{a+b-x}+\sqrt{2x}}=\sqrt{\frac{x-a}{a+2b-x}}$$

L. $x=a+b,\ a+b,\ \sqrt{a^2+2ab}.$

6. $$\frac{\sqrt{2(x-b)}+\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a-2b}}{\sqrt{2(x-b)}-\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a-2b}}=\sqrt{\frac{a+b+x}{3a-b-x}}$$

L. $x=a,\ 2a-b,\ \sqrt{a^2+b^2}.$

Die Gleichung 4 ist ein specieller Fall von I, die Gleichung 5 von II, die Gleichung 6 genau genommen weder von I noch von II. Links stimmt die Form ganz, wenn man $A=2(x-b)$, $C=x-a$ setzt; rechts jedoch nicht. Dies kommt daher, dafs hier keine Gleichung von der Form (9) zum Grunde liegt. Die Auflösung geschieht, wie oben angegeben. Dann kommt man auf die Partialgleichungen:

1) $\sqrt{2(x-b)}+\sqrt{x+a-2b}=0,$

2) $$\frac{\sqrt{2(x-b)}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{2(x-b)}-\sqrt{x-a}}=\frac{a+b+x}{3a-b-x}.$$

Die letzte Gleichung ergiebt sich aus

$$(14)\qquad \sqrt{\frac{2(x-b)}{x-a}}=\frac{2a}{b-a+x}.$$

Diese Gleichung entsteht, wenn man die 6. und 3. Darstellung von t, welche zu (α) in Ic. gehören, einander gleich und x statt r setzt. Die Gleichung (14) ist dann behandelt, um die Gleichung 6 abzuleiten, wie oben die Gleichung (10). Zur Auflösung ist die Gleichung (14) von der Wurzel zu befreien, zu ordnen und dann zu zerlegen. Die Zerlegung liegt hier nicht so auf der Hand, wie bei den andern bisher aufgestellten Gleichungen.

XV b. $$\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{D}{E}}.$$

So kann man aus allen symmetrischen Gleichungen des 4. Grades, indem man die Darstellungen von t, nämlich t_4 und ein anderes t benutzt, beliebig viele Gleichungen von der Form 239 ableiten.

Setzt man z. B. die 4. und die 1. Darstellung von t bei (5) in I. einander gleich und x statt r, so erhält man durch Quadriren

$$\sqrt{\frac{5a+b+3x}{5b+a+x}}=\frac{7b-a+x}{6b}.$$

Hieraus ergiebt sich auf dem oben angegebenen Wege, der Gleichung 239 entsprechend,

7. $$\frac{\sqrt{5a+b+3x}+\sqrt{5b+a+x}+\sqrt{4a-4b+2x}}{\sqrt{5a+b+3x}-\sqrt{5b+a+x}+\sqrt{4a-4b+2x}}=\sqrt{\frac{x-a+13b}{x-a+b}}$$

L. $x=-(a+5b),\ a-19b,\ \sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

Zur Auflösung ist die Gleichung zu behandeln wie die Gleichung 6. Die Zerlegung liegt auch hier nicht auf der Hand, nur die erste Partialgleichung

$$\sqrt{5a+b+3x}+\sqrt{4a-4b+2x}=0$$

ist leicht zu finden.

Hätte man statt der 1. die 3. Darstellung von t bei (5) in I. benutzt, also gesetzt

$$(15)\quad \sqrt{\frac{5a+b+3x}{a+5b+x}}=\frac{2a+4b+2x}{a+5b+x},$$

so hätte man erhalten

8. $$\frac{\sqrt{5a+b+3x}+\sqrt{5b+a+x}+\sqrt{4a-4b+2x}}{\sqrt{5a+b+3x}-\sqrt{5b+a+x}+\sqrt{4a-4b+2x}}=\sqrt{\frac{3a+9b+3x}{a-b+x}}$$

L. $x=-(a+5b),\ -(a+5b),\ \sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

Die Gleichung 8 ist ein specieller Fall der Gleichung II, und die Partialgleichungen sind leicht aufzufinden; denn die Gleichung (15), auf welche man bei der Auflösung kommt, ist leicht zu zerlegen.

Auch die Gleichung 239 ist aus Darstellungen von t abgeleitet, die zu einer symmetrischen Gleichung des vierten Grades gehören. Die meisten Gleichungen, welche von der hier gewünschten Form auf dem angegebenen Wege gebildet werden, sind jedoch unförmlich.

Die Gleichung (9) hat die Form, welche in I. behandelt ist. Auch die aus diesen Gleichungen abgeleiteten Gleichungen von der hier verlangten Form werden meistens unförmlich, doch ist ihre Auflösung stets einfach, weil ihre Zerlegung auf der Hand liegt oder sich leicht zu erkennen giebt. Die folgenden Gleichungen haben die in I. behandelte Form. Die ersten 8 kommen in I. vor oder lassen sich leicht direkt oder aus den dort aufgestellten Gleichungen bilden.

1) $(17a+b-x)(17b+a-x)=(3a+3b-3x)^2$
L. $x=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

2) $(x+a+b)(2x-2a-2b)=16(a-b)^2$
L. $x=\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

3) $(5x-3a+4b)(5x-3a-4b)=(5a-3x)^2$
L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

4) $2(x-a)\cdot(x-b)=(a+b-x)^2$
L. $x=\sqrt{a^2+b^2}$.

5) $(5a+7b-4x)(a-b)=(2a-2b-x)^2$
L. $x=\sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

6) $(a+b+2x)(a-2b+2x)=(2a-b+x)^2$
L. $x=\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

7) $(a+x)(a-x)=b^2$
L. $x=\sqrt{a^2-b^2}$.

8) $(a+4b+4x)(a+4b-4x)=(a-4b)^2$
L. $x=\sqrt{ab}$.

9) $(a-x)(b-x)=x^2$
L. $x=\frac{ab}{a+b}$.

10) $(a-x)(x-b)=(x-b)^2$
L. $x=b,\ \frac{a+b}{2}$.

Benutzt man diese Gleichungen zur Aufstellung von Gleichungen der hier behandelten Art, wie es bei der allgemeinen Gleichung I. angegeben ist, so erhält man folgende Gleichungen:

9. $\dfrac{\sqrt{17a+b-x}+\sqrt{17b+a-x}+4\sqrt{a-b}}{\sqrt{17a+b-x}-\sqrt{17b+a-x}+4\sqrt{a-b}}=\sqrt{\dfrac{2(5a+b-x)}{7a-b+x}}$

L. $x=17a+b,\ 17b+a,\ \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

10. $\dfrac{\sqrt{x+a+b}+\sqrt{2(x-a-b)}+\sqrt{3a+3b-x}}{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{2(x-a-b)}+\sqrt{3a+3b-x}}=\sqrt{\dfrac{x+5a-3b}{x+5b-3a}}$

L. $x=\pm(a+b),\ \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

11. $\dfrac{\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}+\sqrt{8b}}{\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}+\sqrt{8b}}=\sqrt{\dfrac{x+a+2b}{4x-4a+2b}}$

L. $x=\dfrac{3a\pm 4b}{5},\ \sqrt{a^2+b^2}$.

12. $\dfrac{\sqrt{2(x-a)}+\sqrt{x-b}+\sqrt{x-2a+b}}{\sqrt{2(x-a)}-\sqrt{x-b}+\sqrt{x-2a+b}}=\sqrt{\dfrac{x-a+b}{3x-3a-b}}$

L. $x=a,\ b,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

13. $\dfrac{\sqrt{5a+7b-4x}+\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+2b-x}}{\sqrt{5a+7b-4x}-\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+2b-x}}=\sqrt{\dfrac{7a+5b-5x}{3(a+3b-x)}}$

L. $x=\dfrac{5a+7b}{4},\ \sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

14. $\dfrac{\sqrt{a+b+2x}+\sqrt{a-2b+2x}+\sqrt{3b}}{\sqrt{a+b+2x}-\sqrt{a-2b+2x}+\sqrt{3b}}=\sqrt{\dfrac{3(x+a)}{x-a+2b}}$

L. $x=-\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{2b-a}{2},\ \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

15. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}+\sqrt{2x}}=\sqrt{\dfrac{a+b+x}{a-b+x}}$

L. $x=\pm a,\ \sqrt{a^2-b^2}$.

16. $\dfrac{\sqrt{a+4b+4x}+\sqrt{a+4b-4x}+\sqrt{8x}}{\sqrt{a+4b+4x}-\sqrt{a+4b-4x}+\sqrt{8x}}=\sqrt{\dfrac{2x+a}{2x+4b}}$

L. $x=\pm\dfrac{a+4b}{4},\ \sqrt{ab}$.

$$\text{XVb.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{D}{E}}.$$

17. $$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}+\sqrt{a-b}}=\sqrt{\frac{a}{a-2x}}$$

L. $x=a,\ b,\ \frac{ab}{a+b}$.

18. $$\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}+\sqrt{a+b-2x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}+\sqrt{a+b-2x}}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b-2x}}$$

L. $x=a,\ b,\ \frac{a+b}{2}$.

Setzt man für a und b bestimmte Zahlen, so kann man aus den aufgestellten Gleichungen wiederum eine beliebige Anzahl von Gleichungen ableiten. So erhält man, wenn man 1) $a=4$, $b=3$ in 12 setzt, 2) $a=5$, $b=4$ in 15, 3) $a=5$, $b=3$ in 17, bezw. folgende Gleichungen:

19. $$\frac{\sqrt{2x-8}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{2x-8}-\sqrt{x-3}+\sqrt{x-5}}=\sqrt{\frac{x-1}{3x-15}}$$

L. $x=3,\ 4,\ \pm 5$.

20. $$\frac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}+\sqrt{2x}}=\sqrt{\frac{9+x}{1+x}}$$

L. $x=\pm 5,\ \pm 3$.

21. $$\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{3-x}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{5}{5-2x}}$$

L. $x=5,\ 3,\ 1\frac{7}{8}$.

c. Um auch für die Gleichung 239_1 die allgemeine Form zu entwickeln, hat man mit Voraussetzung der Gleichung (9) von der Gleichung

$$(16)\quad \frac{A+C}{2\sqrt{AC}}=\frac{A+C}{2B}$$

auszugehen. Wendet man korr. Add. an und radicirt, so erhält man

$$(17)\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}}=\sqrt{\frac{A+C+2B}{A+C-2B}}.$$

Hieraus, wie die Gleichung 3 aus (7) entwickelt ist,

$$\text{III.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}+\sqrt{A-C}}{\sqrt{A}-\sqrt{C}+\sqrt{A-C}}=\sqrt[4]{\frac{A+C+2B}{A+C-2B}}$$

L. 1) $A+C=0$, 2) $C=0$, 3) $AC=B^2$.

$$\text{XVc.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{A}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C}}=\sqrt[4]{\frac{D}{E}}.$$

Verfährt man, wie 239_1 aus (7) abgeleitet ist, so erhält man

$$\text{IV.}\quad \frac{\sqrt{C}+\sqrt{A}-\sqrt{A-C}}{\sqrt{C}-\sqrt{A}+\sqrt{A-C}}=\sqrt[4]{\frac{A+C+2B}{A+C-2B}}$$

L. 1) $A+C=0$, 2) $C=0$, 3) $AC=B^2$.

Die Partialgleichungen für III und IV ergeben sich aus der Zerlegung der Gleichung (16), welche man aus III und IV erhält, wenn man quadrirt, links durch $\sqrt{A}\pm\sqrt{A-C}$ hebt, quadrirt und korr. Add. anwendet, und aus der auch hier möglichen Gleichung

$$\sqrt{A}\pm\sqrt{A-C}=0.$$

Die Gleichungen III und IV sind allgemeine Formen der Gleichung 239_1. In Bezug auf die Gröfsen A, B, C gelten die bei I und II in b. über diese Gröfsen gemachten Bemerkungen.

Die Gleichung (17), aus welcher die Gleichungen III und IV abgeleitet sind, hat die Form der in XIV. vorkommenden Gleichungen. Daher wird man auch auf dem hier angegebenen Wege aus jeder der in XIV. angegebenen Gleichungen eine Gleichung von der Form 239_1 ableiten können. Die in XIV. vorkommenden Gleichungen sind, wie die Gleichung (16), wiederum aus Gleichungen von der in I. behandelten Form oder aus den Darstellungen von t, welche zu symmetrischen Gleichungen des vierten Grades gehören, abgeleitet. Daher lassen sich auch aus den in I. behandelten Gleichungen und aus den angegebenen Darstellungen von t Gleichungen von der Form 239_1 ableiten.

Will man z. B. die Gleichung [231], welche in XIV. behandelt ist, zur Formation einer Gleichung von der hier verlangten Art benutzen, so hat man aus derselben, da sie die Form der Gleichung (7) hat, zunächst eine Gleichung zu bilden, welche der Gleichung (8) analog ist. Man erhält

$$\frac{\sqrt{2a+x}+\sqrt{3(2a-x)}}{2\sqrt{x-a}}=\frac{2\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a+x}-\sqrt{3(2a-x)}}=\sqrt[4]{\frac{2a+x}{2a-2x}},$$

und hieraus nach dem KS.

$$\text{XV c.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\sqrt[4]{\frac{D}{E}}.$$

22. $$\frac{\sqrt{2a+x}+\sqrt{3(2a-x)}+2\sqrt{x-a}}{\sqrt{2a+x}-\sqrt{3(2a-x)}+2\sqrt{x-a}}=\sqrt[4]{\frac{2a+x}{2a-2x}}$$

L. $x=4a,\ 2a,\ \pm a.$

In derselben Weise erhält man aus den in XIV. behandelten und vorkommenden Gleichungen 232, 233, 234, 235, 2 und 3 bezw. folgende Gleichungen von der hier verlangten Form:

23. $$\frac{\sqrt{7a+x}-\sqrt{3(a-x)}+2\sqrt{a+x}}{\sqrt{7a+x}+\sqrt{3(a-x)}+2\sqrt{a+x}}=\sqrt[4]{\frac{a+x}{2(2a-x)}}$$

L. $x=5a,\ a,\ \pm a.$

24. $$\frac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}+\sqrt{5a-3a}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}+\sqrt{5a-3x}}=\sqrt[4]{\frac{5x+a}{5x-7a}}$$

L. $x=\frac{3}{5}a,\ a,\ a\sqrt{2}.$

25. $$\frac{\sqrt{4a+b-4x}-\sqrt{b}+2\sqrt{a-x}}{\sqrt{4a+b-4x}+\sqrt{b}+2\sqrt{a-x}}=\sqrt[4]{\frac{a+b-2x}{a}}$$

L. $x=\frac{2a+b}{2},\ \sqrt{ab}.$

26. $$\frac{\sqrt{x+a}+2\sqrt{x-a}+\sqrt{5a-3x}}{\sqrt{x+a}-2\sqrt{x-a}+\sqrt{5a-3x}}=\sqrt[4]{\frac{5x-3a+4b}{5x-3a-4b}}$$

L. $x=\frac{3}{5}a,\ a,\ \sqrt{a^2+b^2}.$

27. $$\frac{\sqrt{7a-9b+3x}+\sqrt{7b-9a+3x}+4\sqrt{a-b}}{\sqrt{7a-9b+3x}-\sqrt{7b-9a+3x}+4\sqrt{a-b}}=\sqrt[4]{\frac{x+a+b}{2(x-a-b)}}$$

L. $x=\frac{a+b}{3},\ \frac{9a-7b}{3},\ \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}.$

28. $$\frac{\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}+\sqrt{8b}}{\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}+\sqrt{8b}}=\sqrt[4]{\frac{x+a}{4(x-a)}}$$

L. $x=\frac{3}{5}a,\ \frac{3a+4b}{5},\ \sqrt{a^2+b^2}.$

Will man die in I. vorkommenden Gleichungen zur Aufstellung von Gleichungen benutzen, welche die Form 239_1 haben, so mufs man zunächst die der Gleichung (16) analoge Gleichung bilden. So hat man aus 1) oben auf S. 318

$$\frac{(17a+b-x)+(17b+a-x)}{2\sqrt{(17a+b-x)(17b+a-x)}}=\frac{18a+18b-2x}{6a+6b-6x}.$$

$$\text{XVc.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \sqrt[4]{\frac{D}{E}}.$$

Hieraus durch einfache korr. Add. und Radicirung

$$\frac{\sqrt{17a+b-x}+\sqrt{17b+a-x}}{\sqrt{17a+b-x}-\sqrt{17b+a-x}} = \sqrt{\frac{6a+6b-2x}{3a+3b+x}}.$$

Verfährt man hiermit, wie es mit der Gleichung (7) geschehen ist, um zunächst (8) und aus (8) die Gleichung 3 zu bilden, so erhält man

29. $$\frac{\sqrt{17a+b-x}+\sqrt{17b+a-x}+4\sqrt{a-b}}{\sqrt{17a+b-x}-\sqrt{17b+a-x}+4\sqrt{a-b}} = \sqrt[4]{\frac{6a+6b-2x}{3a+3b+x}}$$

L. $x = 9(a+b)$, $a+17b$, $\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Ebenso erhält man nach der allgemeinen Gleichung III aus den S. 318 angeführten Gleichungen 2) bis 10) folgende Gleichungen:

30. $$\frac{\sqrt{x+a+b}+\sqrt{2(x-a-b)}+\sqrt{3a+3b-x}}{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{2(x-a-b)}+\sqrt{3a+3b-x}} = \sqrt[4]{\frac{3x+7a-9b}{3x+7b-9a}}$$

L. $x = \frac{a+b}{3}$, $a+b$, $\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

31. $$\frac{\sqrt{5x-3a+4b}+\sqrt{5x-3a-4b}+\sqrt{8b}}{\sqrt{5x-3a+4b}-\sqrt{5x-3a-4b}+\sqrt{8b}} = \sqrt[4]{\frac{x+a}{4(x-a)}}$$

L. $x = \frac{3}{5}a$, $\frac{3a+4b}{5}$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

32. $$\frac{\sqrt{2(x-a)}+\sqrt{x-b}+\sqrt{x-2a+b}}{\sqrt{2(x-a)}-\sqrt{x-b}+\sqrt{x-2a+b}} = \sqrt[4]{\frac{x+b}{5x-4a-3b}}$$

L. $x = \frac{2a+b}{3}$, b, $\sqrt{a^2+b^2}$.

33. $$\frac{\sqrt{5a+7b-4x}+\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+2b-x}}{\sqrt{5a+7b-4x}-\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+2b-x}} = \sqrt[4]{\frac{5a+b-3x}{5b+a-x}}$$

L. $x = \frac{3}{2}(a+b)$, $\sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

34. $$\frac{\sqrt{a+b+2x}+\sqrt{a-2b+2x}+\sqrt{3b}}{\sqrt{a+b+2x}-\sqrt{a-2b+2x}+\sqrt{3b}} = \sqrt[4]{\frac{3(2x+2a-b)}{2x-2a+b}}$$

L. $x = \frac{b-2a}{4}$, $\frac{2b-a}{2}$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

35. $$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}+\sqrt{2x}} = \sqrt[4]{\frac{a+b}{a-b}}$$

L. $x = a$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

XVc. $\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}+\sqrt{C}}=\sqrt[4]{\dfrac{D}{E}}$.

36. $\dfrac{\sqrt{a+4b+4x}+\sqrt{a+4b-4x}+\sqrt{8x}}{\sqrt{a+4b+4x}-\sqrt{a+4b-4x}+\sqrt{8x}}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{4b}}$

L. $x=\dfrac{a+4b}{4}, \sqrt{ab}$.

37. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}+\sqrt{a-b}}=\sqrt[4]{\dfrac{a+b}{a+b-4x}}$

L. $x=\dfrac{a+b}{2}, b, \dfrac{ab}{a+b}$.

38. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}+\sqrt{a+b-2x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}+\sqrt{a+b-2x}}=\sqrt[4]{\dfrac{a-3b+2x}{a+b-2x}}$

L. $x=b, b, \dfrac{a+b}{2}$.

Würde man links in 38 die beiden ersten Quadratwurzeln vertauschen und $2x-a-b$ statt $a+b-2x$ setzen, so würde man als Lösung erhalten

$$x=a,\ b,\ \frac{a+b}{2}.$$

Setzt man 1) $a=4$, $b=3$ in 32; 2) $a=5$, $b=4$ in 35; 3) $a=5$, $b=3$ in 37, so erhält man bezw.

39. $\dfrac{\sqrt{2x-8}+\sqrt{x-3}+\sqrt{x-5}}{\sqrt{2x-8}-\sqrt{x-3}+\sqrt{x-5}}=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{5(x-5)}}$

L. $x=3, 3\frac{2}{3}, \pm 5$.

40. $\dfrac{\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}+\sqrt{2x}}=\sqrt[4]{9}$

L. $x=5, \pm 3$.

41. $\dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{2}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{3-x}+\sqrt{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{2}{2-x}}$

L. $x=4, 3, 1\frac{7}{8}$.

Hier ist überall nur die Form III angewendet. Man hätte ebenso gut die Form IV anwenden können. So könnte man z. B. statt 35 auch schreiben:

42. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}+\sqrt{2x}}=\sqrt[4]{\dfrac{a+b}{a-b}}$

L. $x=a, \sqrt{a^2-b^2}$.

XVd. $$\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{C}-\sqrt{D}}=\sqrt[4]{\frac{A}{C}}.$$

d. Die Gleichung 239_2 ist von etwas anderer Form als die beiden vorhergehenden Gleichungen. Man kann sie leicht zerlegen in

$$1)\quad (a-x)(x-b)=c^2$$

$$2)\quad a-x=x-b.$$

Die erste Gleichung ist von der Form, wie sie in I. behandelt sind.

Allgemein läfst sich die Gleichung 239_2 so darstellen:

V. $$\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{C}+\sqrt{B}}=\sqrt[4]{\frac{A}{C}}$$

L. 1) $A=C$, 2) $AC=B^2$.

Macht man nämlich gleichnamig, so erhält man leicht

$$\sqrt[4]{AC}\left(\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{C}\right)=\sqrt{B}\left(\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{C}\right),$$

kommt also auf die angegebenen Partialgleichungen.

Für A, B, C können beliebige lineare Ausdrücke in x gesetzt werden; die Gleichung ist stets quadratisch lösbar.

Die zweite Partialgleichung hat die Form der in I. behandelten Gleichungen. Setzt man aus einer solchen Gleichung für A, B, C die betreffenden Werte in V, so erhält man eine Gleichung von der Form 239_2. Für die auf S. 218 angeführte Gleichung 1) hätte man in V zu setzen:

$$A=17a+b-x,\qquad C=17b+a-x,$$
$$B=3a+3b-3x.$$

In dieser Weise erhält man aus den oben in b. unter 1), 2), 4), 7) und 8) vorkommenden Gleichungen folgende:

43. $$\frac{\sqrt{17a+b-x}+\sqrt{3(a+b-x)}}{\sqrt{17b+a-x}+\sqrt{3(a+b-x)}}=\sqrt[4]{\frac{17a+b-x}{17b+a-x}}$$

L. $x=\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

44. $$\frac{\sqrt{x+a+b}+4\sqrt{a-b}}{\sqrt{2(x-a-b)}+4\sqrt{a-b}}=\sqrt[4]{\frac{x+a+b}{2(x-a-b)}}$$

L. $x=3a+3b,\ \sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

$$\text{XVd.}\quad \frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{C}+\sqrt{B}}=\sqrt[4]{\frac{A}{C}}.$$

45. $$\frac{\sqrt{2(x-a)}+\sqrt{a+b-x}}{\sqrt{x-b}\;+\sqrt{a+b-x}}=\sqrt[4]{\frac{2(x-a)}{x-b}}$$

L. $x=2a-b,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

46. $$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{b}}=\sqrt[4]{\frac{a+x}{a-x}}$$

L. $x=0,\ \sqrt{a^2-b^2}$.

47. $$\frac{\sqrt{a+4b+4x}+\sqrt{a-4b}}{\sqrt{a+4b-4x}+\sqrt{a-4b}}=\sqrt[4]{\frac{a+4b+4x}{a+4b-4x}}$$

L. $x=0,\ \sqrt{ab}$.

Weiter kommen in Ii. folgende Gleichungen vor:

1) $(a+b-2x)(9a+b-10x)=(2x-3a+b)^2$
L. $x=a,\ b$.

2) $(5x-5a+4b)(13x-13a+12b)=(8x-8a+7b)^2$
L. $x=a+b,\ a-b$.

3) $(3a+3b-2x)(59a+43b-34x)=(2x-7a+b)^2$
L. $x=2a+b,\ 2b+a$.

Man kann nach Ii. noch leicht finden:

4) $(4a+b-5x)(9a+4b-13x)=(6a+2b-8x)^2$
L. $x=a,\ b$.

5) $(7-5x)(21-13x)=(12-8x)^2$
L. $x=3,\ 1$.

6) $(4-5x)(9-13x)=(6-8x)^2$
L. $x=1,\ 0$.

7) $(9-5x)(22-13x)=(14-8x)^2$
L. $x=2,\ 1$.

Benutzt man diese Gleichungen für die Gleichung V, so erhält man bezw. folgende Gleichungen:

48. $$\frac{\sqrt{a+b-2x}+\sqrt{2x-3a+b}}{\sqrt{9a+b-10x}+\sqrt{2x-3a+b}}=\sqrt[4]{\frac{a+b-2x}{9a+b-10x}}$$

L. $x=a,\ a,\ b$.

49. $\frac{\sqrt{5x-5a+4b}+\sqrt{8x-8a+7b}}{\sqrt{13x-13a+12b}+\sqrt{8x-8a+7b}} = \sqrt[4]{\frac{5x-5a+4b}{13x-13a+12b}}$

L. $x = a+b,\ a-b,\ a-b.$

50. $\frac{\sqrt{3a+3b-2x}+\sqrt{2x-7a+b}}{\sqrt{59a+43b-34x}+\sqrt{2x-7a+b}} = \sqrt[4]{\frac{3a+3b-2x}{59a+43b-34x}}$

L. $x = \frac{7a+5b}{4},\ 2a+b,\ a+2b.$

51. $\frac{\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{6a+2b-8x}}{\sqrt{9a+4b-13x}+\sqrt{6a+2b-8x}} = \sqrt[4]{\frac{4a+b-5x}{9a+4b-13x}}$

L. $x = \frac{5a+3b}{8},\ a,\ b.$

52. $\frac{\sqrt{7-5x}+2\sqrt{3-2x}}{\sqrt{21-13x}+2\sqrt{3-2x}} = \sqrt[4]{\frac{7-5x}{21-13x}}$

L. $x = 1\frac{3}{4},\ 3,\ 1.$

53. $\frac{\sqrt{4-5x}+\sqrt{6-8x}}{\sqrt{9-13x}+\sqrt{6-8x}} = \sqrt[4]{\frac{4-5x}{9-13x}}$

L. $x = \frac{5}{8},\ 1,\ 0.$

54. $\frac{\sqrt{9-5x}+\sqrt{14-8x}}{\sqrt{22-13x}+\sqrt{14-8x}} = \sqrt[4]{\frac{9-5x}{22-13x}}$

L. $x = \frac{13}{8},\ 2,\ 1.$

XVI. $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{C}{D}$, kubisch.

240. $\left(\frac{3a+2b+3x}{4a+b-x}\right)^2 = \frac{2a+3b+2x}{2b+3a-2x}$

L. $x = \frac{a-b}{4},\ \sqrt{a^2+3ab+b^2}.$

240_1. $\left(\frac{a+3b+3x}{a+7b-x}\right)^2 = \frac{3a+b+x}{3b+a-x}$

L. $x = \frac{a+11b}{5},\ \sqrt{a^2+6ab+b^2}.$

a. Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die in VII. behandelten; nur unterscheiden sie sich von jenen wesentlich dadurch, dafs sie kubisch sind, also drei Wurzeln haben, während jene quadratisch sind. Dort fiel die dritte Potenz von x bei der Entwickelung fort, was hier nicht der Fall ist. Das macht die Auflösung der Gleichungen schwieriger, die Aufstellung aber bedeutend leichter. Die Aufstellung der in VII. behandelten Gleichungen wurde wesentlich durch die Bedingung erschwert, dafs die Gleichungen quadratisch sein sollten.

Nach VIIa. lassen sich aus den Darstellungen von t, welche aus symmetrischen Gleichungen des vierten Grades abgeleitet sind, sofort beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Form hinschreiben. Man hat nur irgend eine Darstellung von t, welche durch eine Quadratwurzel ausgedrückt ist, gleich der Darstellung von t_4 und x (oder $-x$) statt r zu setzen und zur 4. Potenz zu erheben, so ist die Gleichung fertig. In dieser Weise kann man aus den Darstellungen von t in I. bei (3), (6), (7) und (11) bezw. folgende und viele andere Gleichungen hinschreiben:

1. $\left(\frac{5a + b - x}{a + b - x}\right)^2 = \frac{3(5a + b - x)}{5b + a - x}$

L. $x = 5a + b$, $\sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$.

2. $\left(\frac{3a - b + x}{2b - a + x}\right)^2 = \frac{2(x - b)}{x - a}$

L. $x = 9a - 8b$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3. $\left(\frac{12a - 5b}{12x - 13b}\right)^2 = \frac{5a + 12b + 13x}{5a - 12b + 13x}$

L. $x = \frac{97b - 30a}{78}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

4. $\left(\frac{4x + 5b}{4a - 3b}\right)^2 = \frac{5x - 3a + 4b}{5x - 3a - 4b}$

L. $x = \frac{6a - 17b}{10}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$ u. s. w.

Auf diesem Wege sind wahrscheinlich auch die Gleichungen [215—215_2] entstanden.

Die rechte Seite von Gleichungen dieser Art ist bei der Ableitung der Gleichungen aus Darstellungen von t, die zu einer symmetrischen Gleichung des vierten Grades gehören, durch die betreffende Darstellung von t vollständig bestimmt, da es für eine symmetrische Gleichung des vierten Grades nur ein t_4 in dieser einfachen Form giebt. Die linke Seite kann beliebig vielfach ausgedrückt werden. So hat man zu der symmetrischen Gleichung des vierten Grades (18) in V. als Darstellungen von t, wenn man $-b$ statt b setzt:

1) $\sqrt{\frac{r-a-b}{2b}}$ 2) $\sqrt{\frac{2a}{r+a+b}}$ 3) $\sqrt{\frac{a-b+r}{a+3b+r}}$

4) $\sqrt{\frac{3a+b-r}{a-b+r}}$ 5) $\sqrt[4]{\frac{3a+b-r}{3b+a+r}}$ für $r = \sqrt{a^2+6ab+b^2}$.

Daher kann man hier auf dem angegebenen Wege folgende Gleichungen hinschreiben:

5. $\left(\frac{a+b-x}{2b}\right)^2 = \frac{3a+b-x}{3b+a+x}$

6. $\left(\frac{2a}{a+b+x}\right)^2 = \frac{3a+b-x}{3b+a+x}$

7. $\left(\frac{a-b+x}{a+3b+x}\right)^2 = \frac{3a+b-x}{3b+a+x}$

8. $\left(\frac{3a+b-x}{a-b+x}\right)^2 = \frac{3a+b-x}{3b+a-x}$.

Alle Gleichungen haben die gemeinschaftliche Lösung

$$x = \sqrt{a^2+6ab+b^2},$$

aufser dieser noch bezw. folgende:

$$a-b, \quad a-b, \quad -(a+3b), \quad a+3b.$$

Man kann jedoch aus den angegebenen Darstellungen von t statt der vier Gleichungen unendlich viele ableiten. Aus der ersten und zweiten Darstellung von t ergiebt sich zunächst nach dem KS. die allgemeine Darstellung von t

$$\sqrt{\frac{(r-a-b)m+2an}{(r+a+b)n+2bm}}.$$

Hier sind m und n beliebig. Setzt man diese gleich der fünften Darstellung und x statt r, so erhält man allgemein

9. $\left(\frac{(x-a-b)m+2an}{(x+a+b)n+2bm}\right)^2 = \frac{3a+b-x}{3b+a+x}$

L. $x = (a-b) - \frac{4mn}{m^2+n^2}(a+b)$, $\sqrt{a^2+6ab+b^2}$.

Setzt man 1) $m = 1$, $n = 3$; 2) $m = 3$, $n = 1$, so erhält man bezw.

10. $\left(\frac{5a - b + x}{3a + 5b + 3x}\right)^2 = \frac{3a + b - x}{3b + a + x}$

11. $\left(\frac{a + 3b - 3x}{a + 7b + x}\right)^2 = \frac{3a + b - x}{3b + a + x}$

L. $x = -\frac{a + 11b}{5}$, $\sqrt{a^2 + 6ab + b^2}$.

Beide Gleichungen haben dieselben Wurzeln, weil der in der Lösung von 9 vor $(a + b)$ stehende Faktor für die angegebenen Werte von m und n denselben Wert hat. Dies geschieht dann immer, wenn die Werte von m und n nur vertauscht sind. Die letzte Gleichung ist identisch mit 240_1, wenn man $-x$ statt x setzt.

b. Das einfachste Verfahren, Gleichungen dieser Art aufzustellen, ergiebt sich aus der Benutzung von Gleichungen, wie sie in I. behandelt sind. Die dort behandelten Gleichungen haben die Form

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C}.$$

Nach dem KS. hat man auch

$$(2) \quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{mA + nB}{mB + nC}.$$

Multiplicirt man die Quotienten in (1) mit einander und zieht die Wurzel, so mufs man auch haben

$$(3) \quad \frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \sqrt{\frac{A}{C}}.$$

Aus (2) und (3) ergiebt sich, wenn man quadrirt,

$$(4) \quad \left(\frac{mA + nB}{mB + nC}\right)^2 = \frac{A}{C},$$

d. h. eine Gleichung von der hier verlangten Form. Die Lösung wird durch die Partialgleichungen

$$1) \; Am^2 - Cn^2 = 0, \quad 2) \; AC = B^2$$

gegeben. Diese findet man, wenn man links das Quadrat ausführt und gleichnamig macht. Dann hebt sich $2mnABC$ fort.

Soll die Gleichung (4) quadratisch sein, so sind m und n so zu wählen, dafs sich x^3 schliefslich forthebt. Soll die Gleichung kubisch sein, so darf sich x^3 schliefslich nicht fortheben.

Man kann jedoch aus der Gleichung (1) auch eine Gleichung von der hier verlangten Form aufstellen, welche noch viel allgemeiner ist, als die Gleichung (4). Nach der in I. angegebenen Transformationsformel III hat man aus (1) die Gleichung

$$(5)\quad \frac{m^2A + 2mnB + n^2C}{mpA + (np + mq)B + nqC} = \frac{mpA + (np + mq)B + nqC}{p^2A + 2pqB + q^2C}.$$

Bildet man aus dieser Gleichung eine neue Gleichung, wie man oben (4) aus (1) gebildet hat, so erhält man, wenn man m_1 und n_1 statt m und n setzt, da m und n schon bei (4) benutzt sind,

$$(6)\quad \left(\frac{m_1(m^2A + 2mnB + n^2C) + n_1(mpA + (np + mq)B + nqC)}{n_1(p^2A + 2pqB + q^2C) + m_1(mpA + (np + mq)B + nqC)}\right)^2 = \frac{m^2A + 2mnB + n^2C}{p^2A + 2pqB + q^2C}.$$

Sind A, B, C lineare Ausdrücke von x, so wird die Gleichung kubisch oder quadratisch, mufs aber immer lösbar sein, da sie eine Partialgleichung $AC = B^2$ enthält. Die zweite Partialgleichung mufs nach der Lösung von (4) sein

$$m_1^2(m^2A + 2mnB + n^2C) - n_1^2(p^2A + 2pqB + q^2C) = 0.$$

Es möge die allgemeine Gleichung (4) auf einige specielle Fälle der Gleichung (1) angewendet werden. Es sei statt der Gleichung (1)

$$1)\quad (a + x)(a - x) = b^2, \text{ also}$$

$$\frac{a+x}{b} = \frac{b}{a-x}$$

gegeben. Dann ist

$$A = a + x,\quad B = b,\quad C = a - x.$$

Man hat daher aus der Gleichung (4)

12. $\left(\frac{(a + x)m + bn}{(a - x)n + bm}\right)^2 = \frac{a + x}{a - x}$

L. $x = \frac{a(n^2 - m^2)}{n^2 + m^2}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Die Gleichung bleibt für reelle m und n immer kubisch. Setzt man $m = n = 1$, so erhält man

13. $\left(\frac{a + b + x}{a + b - x}\right)^2 = \frac{a + x}{a - x}$

L. $x = 0$, $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Legt man

$$2)\quad x^2 - a^2 = b^2, \text{ also}$$

$$\frac{x - a}{b} = \frac{b}{x + a}$$

zum Grunde, so hat man nach (4)

14. $\left(\frac{(x - a)m + bn}{(x + a)n + bm}\right)^2 = \frac{x - a}{x + a}$

L. $x = \frac{a(n^2 + m^2)}{n^2 - m^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Gleichung wird quadratisch oder hat eine Wurzel ∞, wenn $m = \pm n$ wird. Man erhält für $m = n$

15. $\left(\frac{x - a + b}{x + a + b}\right)^2 = \frac{x - a}{x + a}$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Soll die Gleichung kubisch sein, so mufs $m \gtrless n$ sein. Setzt man $m = 3$, $n = 2$, so erhält man

16. $\left(\frac{3x - 3a + 2b}{2x + 3b + 2a}\right)^2 = \frac{x - a}{x + a}$

L. $x = -\frac{13a}{5}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Legt man nach Ig.

$$3)\quad (a + b + 2x)(a - 2b + 2x) = (2a - b + x)^2$$

zum Grunde, so erhält man

17. $\left(\frac{(a + b + 2x)m + (2a - b + x)n}{(a - 2b + 2x)n + (2a - b + x)m}\right)^2 = \frac{a + b + 2x}{a - 2b + 2x}$

L. $x = \frac{(a + b)m^2 - (a - 2b)n^2}{2(n^2 - m^2)}$, $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Die Lösung wird, wie bei (4), gefunden. Man setzt einfach $a + b + 2x = A$, $2a - b + x = B$, $a - 2b + 2x = C$. Dann findet man zunächst die bei (4) angegebenen Partialgleichungen.

Soll die Gleichung 17 quadratisch sein, so mufs

$$\left(\frac{2m+n}{2n+m}\right)^2 = \frac{2}{2} = 1$$

sein, d. h. $m = n$, wie auch aus der ersten bei der Lösung angegebenen Wurzel folgt. Soll die Gleichung kubisch sein, so mufs

$$\left(\frac{2m+n}{2n+m}\right)^2 \gtrless 1$$

sein, d. h. $m \gtrless 1$, wie auch aus der ersten bei der Lösung angegebenen Wurzel folgt.

Setzt man für m und n bezw. 1) 2, 1; 2) 3, -1, so erhält man folgende Gleichungen:

18. $\left(\frac{5x+4a+b}{4x+5a-4b}\right)^2 = \frac{a+b+2x}{a-2b+2x}$

L. $x = -\frac{a+2b}{2}$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

19. $\left(\frac{a+4b+5x}{5a-b+x}\right)^2 = \frac{a+b+2x}{a-2b+2x}$.

L. $x = -\frac{8a+11b}{16}$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

Legt man

4) $(2a+3b+2x)(3a+2b-2x) = (a-b+x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2+3ab+b^2}$

zum Grunde, so erhält man nach (4)

20. $\left(\frac{(2a+3b+2x)m+(a-b+x)n}{(2b+3a-2x)n+(a-b+x)m}\right)^2 = \frac{2a+3b+2x}{2b+3a-2x}$

L. $x = \frac{(3a+2b)n^2-(2a+3b)m^2}{2(m^2+n^2)}$, $\sqrt{a^2+3ab+b^2}$.

Die Gleichung bleibt für reelle Werte von m und n, wie man auch aus der ersten Lösung sieht, immer kubisch; denn es kann niemals

$$\left(\frac{2m+n}{m-2n}\right)^2 = \frac{+2}{-2} = -1$$

werden. Setzt $m = n = 1$, so erhält man 240.

XVII. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$, kubisch.

240_2. $\frac{a-x}{b+x} \cdot \frac{2x-b}{2a-x} = \frac{2a+b-3x}{2a-b+x}$

L. $x = \frac{6a+b}{5}$, $\sqrt{ab}$.

240_3. $\frac{3x-2b}{2b-x} \cdot \frac{x+3a-2b}{x-a+2b} = \frac{9a+4b-12x}{a+4b-4x}$

L. $x = \frac{4b-a}{2}$, $\sqrt{ab}$.

240_4. $\frac{2x-3a+2b}{2x-3b+2a} \cdot \frac{5a-4b+x}{4a-5b-x} = \frac{x-2a+b}{x-2b+a}$

L. $x = \frac{a+b}{4}$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

a. Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die in IX. behandelten Gleichungen. Sie unterscheiden sich von jenen nur dadurch, dafs sie kubisch sind, während jene quadratisch waren. Gleichungen von der hier vorgeführten Form müssen im allgemeinen kubisch sein; die kubischen Gleichungen dieser Art sind daher leichter aufzustellen als die quadratischen. Sollen die Gleichungen quadratisch sein, so mufs darauf bei der Bildung derselben besondere Rücksicht genommen werden. Die oben stehenden Gleichungen sind nach IXc. gebildet. Man nimmt die Lösung als gegeben an und geht von der durch die Lösung gegebenen Gleichung aus, indem man diese zunächst in eine Qnotientengleichung verwandelt.

Es sei, um 240_2 zu bilden, als Lösung

$$1)\ x = \sqrt{ab}$$

gegeben. Dann hat man zunächst

$$(1)\quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Setzt man den Wert dieser Quotienten $= X$, so erhält man nach dem KS. und nach IXc. oder Eb.

$$(2)\quad X = \frac{a-x}{x-b} = \frac{a+x}{b+x} = \frac{a-x}{b+x}\left(\frac{b+x}{x-b} = \frac{a+x}{a-x}\right).$$

Bildet man aus den beiden in Klammern stehenden gleichen Quotienten nach dem KS. einen neuen gleichwertigen Quotienten, indem man den ersten mit -1, den zweiten mit 2 erweitert und Addition anwendet, so erhält man

$$X = \frac{a-x}{b+x} \cdot \frac{2a-b+x}{2a+b-3x}.$$

Andrerseits hat man aus (1) nach dem KS.

$$X = \frac{2a-x}{2x-b}.$$

Setzt man die für X gefundenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$\frac{2a-x}{2x-b} = \frac{a-x}{b+x} \cdot \frac{2a-b+x}{2a+b-2x}.$$

Stellt man den ersten und dritten Quotienten um, so hat man die Gleichung 240_2.

Um die Gleichung 240_4 zu bilden, sei als Lösung

$$2)\quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben. Hieraus folgt zunächst die Quotientengleichung

$$\frac{a+x}{b} = \frac{a-b}{a-x}.$$

Aus dieser ergiebt sich durch korr. Add. leicht

$$(3)\quad X = \frac{a+x-2b}{2a+2x-3b} = \frac{2x-a-b}{3x-a-2b}.$$

Hieraus folgt nach dem KS. und nach IXc.

$$(4)\quad X = \frac{x-2a+b}{x-3a+b} = \frac{3a-3b}{5a-4b+x}$$
$$= \frac{x-2a+b}{5a-4b+x} \cdot \left| \frac{5a-4b+x}{x-3a+b} = \frac{3a-3b}{x-2a+b} \right|.$$

Erweitert man den zweiten Quotienten in der Klammer mit 3 und wendet den KS. mit Subtraktion an, so erhält man den gleichwertigen Quotienten

$$\frac{4a-5b-x}{2x-3a+2b}.$$

Daher aus (3) und (4)

$$\frac{a-2b+x}{2a-3b+2x}=\frac{x-2a+b}{5a-4b+x}\cdot\frac{4a-5b-x}{2x-3a+2b}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit 240_4.

Auch das in Vg. erörterte Verfahren kann hier oft mit Vorteil angewendet werden. Ist z. B., um die Gleichung 240_3 abzuleiten, als Lösung die Gleichung 1) gegeben, so hat man wieder die Gleichung (1) und aus dieser durch korr. Add. und dann nach dem KS.

$$(5)\quad X=\frac{3x-2b}{2b-x}=\frac{3a-2x}{2x-a}=\frac{x+3a-2b}{x-a+2b}.$$

Nach Vg. kann man hier aus zwei Quotienten zwei neue gleichwertige Quotienten finden, in welchen der Zähler des einen gleich dem Nenner des andern ist. Erweitert man erstens den ersten Quotienten mit -2, den zweiten mit 3; zweitens den ersten Quotienten mit 2, den zweiten mit -1, und wendet jedesmal den KS. mit Addition an, so erhält man

$$(6)\quad X=\frac{9a+4b-12x}{8x-3a-4b}=\frac{8x-3a-4b}{a+4b-4x}.$$

Bestimmt man nun X^2 erstens durch Multiplikation des ersten und dritten Quotienten in (5), zweitens durch Multiplikation der beiden Quotienten in (6) und setzt beide für X^2 gefundene Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Gleichung 240_3.

b. Auch aus jeder der in I. vorkommenden Gleichungen kann man sofort eine Gleichung von der hier verlangten Form hinschreiben.

Die in I. behandelten Gleichungen haben die Form

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}.$$

Setzt man den Wert dieser Quotienten $=X$, so kann man X mit Hülfe des KS. auf doppelte Weise ausdrücken. Man hat allgemein:

$$X=\frac{Am+Bn}{Bm+Cn},\quad X=\frac{Ap+Bq}{Bp+Cq}.$$

Bildet man aus X^2 erstens durch Multiplikation der allgemeinen Quotienten, zweitens durch Multiplikation der ursprünglichen und setzt die Produkte einander gleich, so erhält man

$$(7) \quad \frac{Am + Bn}{Bm + Cn} \cdot \frac{Ap + Bq}{Bp + Cq} = \frac{A}{C},$$

eine Gleichung von der verlangten Form, wenn A, B und C lineare Ausdrücke von x sind. Die Lösung ist gegeben durch die Partialgleichungen

$$1. \; Amp - Cnq = 0, \quad 2. \; AC = B^2.$$

Die Gleichung (7) ist im allgemeinen kubisch. Sie wird quadratisch, wenn in der ersten Partialgleichung x fortfällt, diese also unzulässig ist, wenn man nicht $x = \infty$ gelten lassen will.

Nimmt man

$$1) \; ab = x^2$$

als gegeben an, so hat man, da für (7) dann $A = a$, $C = b$, $B = x$ ist, die Gleichung

1. $\frac{ma + nx}{mx + nb} \cdot \frac{pa + qx}{px + qb} = \frac{a}{b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Die Gleichung ist quadratisch, weil A und C kein x enthalten oder weil rechts das x fortgefallen ist. Setzt man in 1 für m, n, p, q bezw. 1) 3, 2, 5, 7; 2) 11, 6, 8, 1, so erhält man:

2. $\frac{3a + 2x}{3x + 2b} \cdot \frac{5a + 7x}{5x + 7b} = \frac{a}{b}$

3. $\frac{11a + 6x}{11x + 6b} \cdot \frac{8a + x}{8x + b} = \frac{a}{b}$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Nimmt man statt 1) eine Gleichung, welche durch Transformation aus dieser abgeleitet ist, wie sie in I. 66—69 vorkommen, z. B. I. 66

$$\frac{a + 4b + 4x}{2a + 6b + 7x} = \frac{2a + 6b + 7x}{4a + 9b + 12x},$$

so erhält man, der Gleichung (7) entsprechend, für $m = 1$, $n = 1$, $p = 1$, $q = 1$

4. $\frac{3a + 10b + 11x}{6a + 15b + 19x} \cdot \frac{a + 2b + 3x}{2a + 3b + 5x} = \frac{a + 4b + 4x}{4a + 9b + 12x}$

L. $x = -\frac{5a + 13b}{16}$, $\sqrt{ab}$.

Nimmt man

$$2)\ (a + x)(a - x) = b^2$$

als gegeben an, so ist $A = a + x$, $B = b$, $C = a - x$, und die der Gleichung (7) entsprechende Gleichung wird hier

5. $\frac{(a + x)m + bn}{(a - x)n + bm} \cdot \frac{(a + x)p + bq}{(a - x)q + bp} = \frac{a + x}{a - x}$

L. $x = \frac{(nq - mp)a}{nq + mp}$, $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Setzt man für m, n, p, q bezw. $2, 3, 1, -2$, so erhält man:

6. $\frac{2a + 3b + 2x}{2b + 3a - 3x} \cdot \frac{x + a - 2b}{2x + b - 2a} = \frac{a + x}{a - x}$

L. $x = 2a$, $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Legt man

$$3)\ (x + a)(x - a) = b^2$$

zum Grunde, so erhält man nach (7)

7. $\frac{(x + a)m + bn}{(x - a)n + bm} \cdot \frac{(x + a)p + bq}{(x - a)q + bp} = \frac{x + a}{x - a}$

L. $x = \frac{(nq + mp)a}{nq - mp}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Setzt man für m, n, p, q bezw. $1, 1, 1, 2$, so erhält man

8. $\frac{x + a + b}{x - a + b} \cdot \frac{x + a + 2b}{2x + b - 2a} = \frac{x + a}{x - a}$

L. $x = 3a$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Setzt man für m, n, p, q bezw. $-1, 1, 1, 1$ und $-a$ statt a, so erhält man [215_3].

Legt man

$$4)\ (a - x)(b - x) = x^2$$

zum Grunde, so erhält man nach (7)

9. $\frac{(a-x)m + nx}{(b-x)n + mx} \cdot \frac{(a-x)p + qx}{(b-x)q + px} = \frac{a-x}{b-x}$

L. $x = \frac{amp - bnq}{mp - nq}, \quad \frac{ab}{a+b}$.

Die Gleichung ist quadratisch. Die Auflösung ist leicht, wenn man die Gröfsen $a - x$ und $b - x$ ungetrennt läfst. Die Auflösung wird jedoch umständlich, wenn man die Gleichung so schreibt

10. $\frac{am - (m-n)x}{bn + (m-n)x} \cdot \frac{ap - (p-q)x}{bq + (p-q)x} = \frac{a-x}{b-x}$.

Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) 2, 1, 1, 2; 2) 5, 3, 2, 3, so erhält man:

11. $\frac{2a-x}{2b-x} \cdot \frac{a+x}{b+x} = \frac{a-x}{b-x}$

L. $x = \frac{ab}{a+b}, \infty$.

12. $\frac{5a-2x}{3b+2x} \cdot \frac{2a+x}{3b-x} = \frac{a-x}{b-x}$

L. $x = 10a - 9b, \quad \frac{ab}{a+b}$.

Die Gleichung 11 ist vom ersten Grade, wenn man nicht auch $x = \infty$ gelten lassen will. Dic Gleichung hat, genau genommen, zwei Wurzeln $x = \infty$. Es heben sich x^3 und x^2 fort.

Legt man

$$5)\ (3-2x)(6-5x) = (4-3x)^2$$

$$\text{L. } x = 2,\ 1$$

zum Grunde, so erhält man nach (7) allgemein

13. $\frac{(3-2x)m + (4-3x)n}{(6-5x)n + (4-3x)m} \cdot \frac{(3-2x)p + (4-3x)q}{(6-5x)q + (4-3x)p} = \frac{3-2x}{6-5x}$

L. $x = 2, 1, \frac{3mp - 6nq}{2mp - 5nq}$.

Setzt man $m = 2$, $n = 1$, $p = 3$, $q = 2$, so erhält man

14. $\frac{10-7x}{14-11x} \cdot \frac{17-12x}{24-19x} = \frac{3-2x}{6-5x}$

L. $x = 1, 2, 3$.

Legt man

6) $(a + b + 2x)(a - 2b + 2x) = (2a - b + x)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$

zum Grunde, so wird die allgemeine Gleichung ein wenig lang. Setzt man dann $m = 1$, $n = 2$, $p = 1$, $q = 3$, so erhält man

15. $\frac{5a - b + 4x}{6a - 5b + 5x} \cdot \frac{7a - 2b + 5x}{5a - 7b + 7x} = \frac{a + b + 2x}{a - 2b + 2x}$

L. $x = \frac{13b - 5a}{10}, \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Geht man von der Gleichung

7) $(a + b - 2x)(4a + b - 5x) = (2a + b - 3x)^2$

L. $x = a, b$

aus, so erhält man, da die allgemeine Gleichung zu umfangreich wird, als speciellen Fall für $m = 7$, $n = 1$, $p = 1$, $q = 3$

16. $\frac{9a + 8b - 17x}{18a + 8b - 26x} \cdot \frac{7a + 4b - 11x}{14a + 4b - 18x} = \frac{a + b - 2x}{4a + b - 5x}$

L. $x = 5a - 4b, a, b$.

Aus dieser Gleichung kann man wieder beliebig viele Gleichungen mit andern Wurzeln bilden, z. B. mit den Wurzeln $a + b$ und $a - b$, $2a + b$ und $2b + a$, $2a - b$ und $2b - a$ u. s. w., indem man diese Wurzeln statt a und b setzt. Für den ersten Fall erhält man

17. $\frac{17a + b - 17x}{26a + 10b - 26x} \cdot \frac{11a + 3b - 11x}{18a + 10b - 18x} = \frac{2a - 2x}{5a + 3b - 5x}$

L. $x = a + 9b, a + b, a - b$.

Dafs man hier auch bei der Aufstellung der Gleichungen verfahren kann, wie es in IXa. angegeben ist, liegt auf der Hand. Dieser Weg, bei welchen die Darstellungen von t, die zu symmetrischen Gleichungen des 4. Grades gehören, benutzt werden, ist weitab der einfachste, wenn solche Darstellungen vorhanden sind. Ist das nicht der Fall, so sind die hier oder die in IXb. und IXc. angegebenen Wege, bei denen man von der Lösung ausgeht, die einfachsten.

XVIII. $\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2} = \frac{E}{F}$, kubisch.

241. $\frac{(a+b+x)^2+b^2}{(a+b-x)^2+a^2} = \frac{2a+3b+2x}{2b+3a-2x}$

L. $x = \frac{a-b}{4}$, $\sqrt{a^2+3ab+b^2}$.

241$_1$. $\frac{(3a-x)^2+(3x-b)^2}{(5x+a)^2+(5b+x)^2} = \frac{9a+b-6x}{a+25b+10x}$.

L. $x = \frac{7}{8}(a-b)$, $\sqrt{ab}$.

241$_2$. $\frac{(3a+b-x)^2+(a-b+x)^2}{(3b+a+x)^2+(a-b+x)^2} = \frac{3a+b-x}{3b+a+x}$

L. $x = a-b$, $\sqrt{a^2+6ab+b^2}$.

Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die in X. vorkommenden Gleichungen; sie unterscheiden sich von jenen nur dadurch, dafs sie kubisch sind, während jene quadratisch waren. Die Aufstellung dieser Gleichungen geschieht ganz so, wie es in X. angegeben ist, nur macht sie weniger Mühe, da man nicht ängstlich darauf bedacht zu sein braucht, dafs die Gleichung quadratisch wird, also x^3 sich forthebt.

Hat man, um nach Xa. zu verfahren, zu einer symmetrischen Gleichung des 4. Grades für t die Darstellungen gefunden:

$$(1)\quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{C}{D}} = \sqrt[4]{\frac{P}{Q}},$$

so hat man, wenn man quadrirt und den KS. anwendet, auch

$$(2)\quad \frac{Am+Cn}{Bm+Dn} = \frac{Ap+Cq}{Bp+Dq} = \sqrt{\frac{P}{Q}},$$

und daher allgemein als Gleichung von der hier verlangten Form

$$(3)\quad \frac{(Am+Cn)^2+(Ap+Cq)^2}{(Bm+Dn)^2+(Bp+Dq)^2} = \frac{P}{Q},$$

wenn A, B, C, D, P und Q lineare Ausdrücke von x sind. Als einfachste Fälle von (3) hat man folgende Gleichungen, die sich sofort aus (1) hinschreiben lassen:

$$\frac{A^2+C^2}{B^2+D^2} = \frac{P}{Q}$$

XVIII. $\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \frac{E}{F}$, **kubisch.**

$$\frac{(A \pm C)^2 + C^2}{(B \pm D)^2 + D^2} = \frac{P}{Q}$$

$$\frac{A^2 + (A \pm C)^2}{B^2 + (B \pm D)^2} = \frac{P}{Q}$$

$$\frac{(A + C)^2 + (A - C)^2}{(B + D)^2 + (B - D)^2} = \frac{P}{Q} \quad \text{u. s. w.}$$

Aus den Darstellungen bei (3) in I. kann man auf diese Weise hinschreiben:

1. $\frac{(x - a + b)^2 + 36a^2}{(x + a - b)^2 + 4b^2} = \frac{3(x + 5a + b)}{x + 5b + a}$

2. $\frac{(x + 5a + b)^2 + (x - 7a + b)^2}{(x + a + b)^2 + (x - 3b + a)^2} = \frac{3(x + 5a + b)}{x + 5b + a}$

L. $x = 5b - 11a$, $\sqrt{a^2 + 10ab + b^2}$ u. s. w.

Ebenso kann man aus den Darstellungen bei (6) in I. hinschreiben:

3. $\frac{(x + a - b)^2 + 4a^2}{(x - a + b)^2 + b^2} = \frac{2(x - b)}{x - a}$

4. $\frac{(x + 3a - b)^2 + (a + b - x)^2}{(x + 2b - a)^2 + (a - x)^2} = \frac{2(x - b)}{x - a}$

L. $x = 5a - 4b$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ganz so ergiebt sich 241_1 aus den Darstellungen von t bei (45) in I, wenn man $-x$ statt r setzt; 241_2 aus der 3., 4. und 7. Darstellung von t zu (18) in V, wenn man $-b$ statt b setzt.

Die Gleichung 241 ist wahrscheinlich nach Xb. gebildet. Nimmt man die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + 3ab + b^2}$$

als gegeben an, so findet man hieraus als einfachste Quotientengleichung leicht

$$(4) \quad \frac{x + a + b}{a} = \frac{b}{x - a - b},$$

und hieraus weiter nach dem oft angewendeten, besonders in Vg. erörterten Verfahren die gleichwertigen Quotienten

$$(5) \quad \frac{2a + 3b + 2x}{a - b + x} = \frac{a - b + x}{3a + 2b - 2x} = \sqrt{\frac{2a + 3b + 2x}{2b + 3a - 2x}}.$$

Man kann daher aus (4) und (5) hinschreiben

$$\frac{(a+b+x)^2+b^2}{(a+b-x)^2+a^2}=\frac{2a+3b+2x}{2b+3a-2x},$$

d. h. die Gleichung 241.

Dafs sich auch aus jeder der in I. aufgestellten Gleichungen beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten lassen, ist in Xb. gezeigt. Hier liegt nichts daran, dafs die Koefficienten von x in den ungleichen Faktoren einer zu Grunde gelegten Gleichung von der in I. behandelten Form einander gleich sind, wie es dort wünschenswert war. Die Aufstellung dieser Gleichungen macht daher weniger Mühe, als die Aufstellung der in X. behandelten Gleichungen.

Nach (46) in I. hat man z. B.

$$1)\ (a+5b+x)(a+5b-x)=36b^2, \text{ d. h.}$$

$$\frac{a+5b+x}{6b}=\frac{6b}{a+5b-x}=\sqrt{\frac{a+5b+x}{a+5b-x}}.$$

Daher die Gleichung

$$\frac{(a+5b+x)^2+36b^2}{(a+5b-x)^2+36b^2}=\frac{a+5b+x}{a+5b-x}$$

$$\text{L. } x=0, \sqrt{(a-b)(a+11b)}.$$

Die Gleichung ist unter [215_4] angeführt.

Nach I. hat man

$$2)\ 2(x-a)\cdot(x-b)=(a+b-x)^2$$

$$\text{L. } x=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Man hat daher die Quotientengleichung

$$(6)\quad \frac{2(x-a)}{a+b-x}=\frac{a+b-x}{x-b}=\sqrt{\frac{2(x-a)}{x-b}}.$$

Aus den beiden ersten Quotienten kann man nach dem KS. beliebig viele gleichwertige Quotienten bilden, z. B.

$$(7)\quad \frac{x-a+b}{a}=\frac{2b}{x+a-b}=\frac{x-a+3b}{x-b+2a}=\frac{x-a+5b}{2x+3a-2b} \text{ etc.}$$

Daher aus (6) und (7):

5. $\frac{(x - a + b)^2 + 4b^2}{(x + a - b)^2 + a^2} = \frac{2(x - a)}{x - b}$

L. $x = 5b - 4a, \sqrt{a^2 + b^2}$.

6. $\frac{(x - a + 3b)^2 + (x - a + 5b)^2}{(x - b + 2a)^2 + (2x + 3a - 2b)^2} = \frac{2(x - a)}{x - b}$ u. s. w.

L. $x = \frac{17b - 13a}{4}, \sqrt{a^2 + b^2}$.

Nach I. 72 hat man

3) $(a + b - 2x)(9a + b - 10x) = (2x - 3a + b)^2$

L. $x = a, b$.

Das giebt

$$\frac{a + b - 2x}{2x - 3a + b} = \frac{2x - 3a + b}{9a + b - 10x} = \sqrt{\frac{a + b - 2x}{9a + b - 10x}}.$$

Nach dem KS. hat man aus den beiden ersten Quotienten die gleichwertigen:

$$\frac{x - a}{3(a - x)} = \frac{b - x}{b - x} = \frac{a + 5b - 6x}{5b - 3a - 2x} = \frac{b - 2a + x}{b + 6a - 7x}.$$

Daher die Gleichungen:

7. $\frac{(a - x)^2 + (b - 2a + x)^2}{9(a - x)^2 + (b + 6a - 7x)^2} = \frac{a + b - 2x}{9a + b - 10x}$

L. $x = a, b, \frac{11a + b}{12}$.

8. $\frac{(a + 5b - 6x)^2 + (b - x)^2}{(3a - 5b + 2x)^2 + (b - x)^2} = \frac{a + b - 2x}{9a + b - 10x}$

L. $x = a, b, \frac{14a + 31b}{45}$.

9. $\frac{(a + 5b - 6x)^2 + (b - 2a + x)^2}{(3a - 5b + 2x)^2 + (b + 6a - 7x)^2} = \frac{a + b - 2x}{9a + b - 10x}$ u. s. w.

L. $x = a, b, \frac{4a + 29b}{33}$.

Will man Gleichungen von dieser Form mit andern Wurzeln haben, so hat man statt a und b nur diese Wurzeln zu setzen. So kann man auch aus den aufgestellten Gleichungen beliebig viele Zahlengleichungen ableiten, indem man für a und b die Zahlen setzt, welche man als Wurzeln zu erhalten wünscht.

Um auch direkt einige Zahlengleichungen aufzustellen, hat man nach I. 76, wenn man statt a und b bezw. 3 und 1, statt m, n, p, q bezw. 1, 2, 2, 3 setzt,

$$4)\ (7-5x)(21-13x)=(12-8x)^2$$

L. $x = 3, 1$.

Daher

$$\frac{7-5x}{12-8x}=\frac{12-8x}{21-13x}=\frac{5-3x}{9-5x}=\frac{2-2x}{3-3x}\ \text{u. s. w.}$$

Mithin die Gleichungen:

10. $\frac{(5-3x)^2+(2-2x)^2}{(9-5x)^2+(3-3x)^2}=\frac{7-5x}{21-13x}$

L. $x = 3, 1, 7$.

11. $\frac{(7-5x)^2+(12-8x)^2}{(21-13x)^2+(12-8x)^2}=\frac{7-5x}{21-13x}$

L. $x = 3, 1, \frac{7}{4}$.

Legt man

$$5)\ (a-x)(b-x)=x^2$$

$$\text{L. } x=\frac{ab}{a+b}$$

zum Grunde, eine einfache Gleichung, so hat man

$$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{b-x},$$

also nach dem KS. auch die gleichwertigen Quotienten

$$\frac{a}{b}=\frac{a-2x}{2x-b}=\frac{2a-x}{b+x}=\frac{a+x}{2b-x},$$

und kann daher hinschreiben:

12. $\frac{(a-x)^2+x^2}{(b-x)^2+x^2}=\frac{a-x}{b-x}$

13. $\frac{(a-2x)^2+a^2}{(b-2x)^2+b^2}=\frac{a-x}{b-x}$

14. $\frac{(2a-x)^2+(a+x)^2}{(2b-x)^2+(b+x)^2}=\frac{a-x}{b-x}$

L. $x=\frac{ab}{a+b}$.

Die Gleichungen sind nur kubisch, wenn man die Wurzel ∞ zweimal in Anrechnung bringt. Sonst sind die Gleichungen vom 1. Grade; sowohl x^3 als x^2 hebt sich fort.

Selbst die folgenden nach demselben Verfahren gebildeten Gleichungen, die vom 4. Grade zu sein scheinen, sind vom 1. Grade, wenn man die Wurzel ∞ nicht in Anschlag bringen will.

15. $\frac{(a - x)^3 + x^3}{(b - x)^3 + x^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - x}{b - x}$

16. $\frac{(2a - x)^3 + (a + x)^3}{(2b - x)^3 + (b + x)^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a - x}{b - x}$

L. $x = \frac{ab}{a + b}$.

XIX. $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{C}{D}$, $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{a}{b} \cdot \frac{E}{F}$.

242. $\left(\frac{x + 7a - b}{x + 7b - a}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a - b}{x + b - a}$

L. $x = a + b$, $\sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

242₁. $\left(\frac{3a + b - x}{3b + a - x}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a - b}{x + b - a}$

L. $x = a + b$, $\sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

242₂. $\frac{x + 2a - b}{x + 2b - a} \cdot \frac{x + a}{x + b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2x + 2a - b}{2x + 2b - a}$

L. $x = 0$, $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

242₃. $\frac{a - x}{a + x} \cdot \frac{x + b}{x - b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2x - 2a + b}{2x - 2b + a}$

L. $x = \frac{ab}{a + b}$, $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

242₄. $\frac{2a + x}{2x + a} \cdot \frac{x + b}{x + a} = \frac{4a - b}{4b - a} \cdot \frac{2b - x}{2a - x}$

L. $x = \frac{2a(3b - 2a)}{3a - 2b}$, $\sqrt{ab}$.

242₅. $\left(\frac{x + 5a + 3b}{x - 5a + b}\right)^2 = \frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{3a + b + x}{3a + b - x}$

L. $x = \frac{b(3a + b)}{a}$, $\sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$.

242₆. $\left(\frac{4a - x}{4b + x}\right)^2 = \frac{15a - b}{15b - a} \cdot \frac{a + b - 4x}{a + b + 4x}$

L. $x =$ [illegible]$(b - a)$, $\sqrt{a^2 - 14ab + b^2}$.

242$_7$. $\left(\frac{11a+7b+x}{11b+7a-x}\right)^2=\frac{5a+2b}{5b+2a}\cdot\frac{13a+13b+3x}{13a+13b-3x}$

L. $x=\frac{13}{7}(a-b),\ \sqrt{a^2-14ab+b^2}$.

242$_8$. $\frac{3a-x}{3b-x}\cdot\frac{3x-b}{3x-a}=\frac{9a-b}{9b-a}\cdot\frac{8x+3a-3b}{8x-3a+3b}$

L. $x=\frac{3}{10}(a+b),\ \sqrt{ab}$.

242$_9$. $\frac{3a-2x}{3b-2x}\cdot\frac{3x-2b}{3x-2a}=\frac{9a-4b}{9b-4a}\cdot\frac{5x+6a-6b}{5x-6a+6b}$

L. $x=\frac{6}{13}(a+b),\ \sqrt{ab}$.

a. Gleichungen der vorstehenden Art lassen sich sehr leicht aus den Darstellungen von t bilden, die zu symmetrischen Gleichungen des 4. Grades gehören.

Um Gleichungen von der Form 242, 242$_1$ u. s. w. zu erhalten, hat man das Quadrat einer Darstellung von t gleich dem Produkt aus t_{x-y} und t_{x+y} und x statt r zu setzen und beide Seiten der Gleichung ins Quadrat zu erheben. So folgen 1) aus der 1., 3. und 4. Darstellung von t bei (3) in I., 2) aus der 2., 3. und 4. Darstellung die Gleichungen:

1. $\left(\frac{5a+b+x}{a+b+x}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{3(x-a+b)}{x+a-b}$

2. $\left(\frac{x-7a+b}{x-3b+a}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{3(x-a+b)}{x+a-b}$

L. $x=\frac{(b-a)(3a+b)}{3a-b},\ \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Soll links ein Produkt statt eines Quadrats stehen, wie es in 242$_2$, 243$_3$ u. s. w. der Fall ist, so setzt man auch links das Produkt zweier Darstellungen von t. So hat man ebenfalls aus den Darstellungen von t bei (3) in I. die Gleichung

3. $\frac{5a+b+x}{a+b+x}\cdot\frac{7a-b-x}{a-3b+x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{3(x-a+b)}{x+a-b}$

L. $x=\frac{(b-a)(3a-b)}{3a+b},\ \sqrt{a^2+10ab+b^2}$.

Ähnlich hat man aus (6) in I.:

4. $\left(\frac{a+b-x}{a-x}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{2(x+a-b)}{x-a+b}$

L. $x = \frac{(a-b)(2a+b)}{2a-b}$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

5. $\frac{3a-b+x}{2b-a+x} \cdot \frac{x-b}{a+b-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a-b}{x-a+b}$

L. $x = \frac{(a-b)^2}{a+b}$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

In derselben Weise ergiebt sich 242 aus der 1., 2. und 4. Darstellung von t bei (6) in V. Aus den dort angegebenen Darstellungen würde auch folgen

6. $\left(\frac{5a+b-x}{5b+a-x}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a-b}{x+b-a}$

L. $x = a+b$, $\sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

Ebenso folgt aus den Darstellungen von t bei (8) in V:

7. $\left(\frac{5a-3b+x}{5b-3a+x}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+3a-3b}{x+3b-3a}$

8. $\left(\frac{x+a-3b}{x+b-3a}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+3a-3b}{x+3b-3a}$ u. s. w.

L. $x = 3(a+b)$, $\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

In den bisher entwickelten Gleichungen und in den Gleichungen von $242-242_3$ steht rechts der konstante Faktor $\frac{a}{b}$. Wann dieser konstante Faktor bei den Darstellungen von t vorkommen kann, ist in V. ausführlich erörtert. Es mufs im Zähler des Radikanden von t_{x-y} nur a, nicht auch b und r, im Nenner des Radikanden von t_{x-y} nur b, nicht auch a und r vorkommen. Dann erhält man bei der Multiplikation von t_{x+y} und t_{x-y} den Faktor $\frac{a}{b}$. Haben die Radikanden von t_{x+y} und t_{x-y} die angegebenen Eigenschaften nicht, so erhält man bei ihrer Benutzung zur Aufstellung der Gleichungen der hier verlangten Art rechts einen andern konstanten Faktor. So erhält man aus den Darstellungen von t bei (11) in I. die Gleichungen:

9. $\left(\frac{a + 2b + x}{a - 2b + x}\right)^2 = \frac{4a + 3b}{4a - 3b} \cdot \frac{4x + 5b}{4x - 5b}$

L. $x = \frac{5}{3}a, \sqrt{a^2 + b^2}$.

10. $\frac{a + 2b + x}{a - 2b + x} \cdot \frac{b - 2a + 2x}{b + 2a - 2x} = \frac{4a + 3b}{4a - 3b} \cdot \frac{4x + 5b}{4x - 5b}$

L. $x = \frac{15b^2}{16a}, \sqrt{a^2 + b^2}$.

In derselben Weise erhält man aus den Darstellungen von t zu (11) in VI.

11. $\left(\frac{a + 2b - x}{a - 2b + x}\right)^2 = \frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{x + b}{x - b}$

L. $x = a, \pm a$.

Ebenso aus den Darstellungen von t zu (13) in VI. die Gleichungen:

12. $\frac{3a + 5b + x}{a - 5b + x} \cdot \frac{b - a + x}{b + 3a - x} = \frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{x + a + 3b}{x - a - 3b}$

L. $x = \frac{(a + 3b)b}{a}, \sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$.

13. $\left(\frac{3a + 5b + x}{a - 5b + x}\right)^2 = \frac{a + b}{a - b} \cdot \frac{x + a + 3b}{x - a - 3b}$

L. $x = \frac{a(a + 3b)}{b}, \sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$.

Vertauscht man in der letzten Gleichung a und b, so erhält man 242_5.

b. Am einfachsten leitet man Gleichungen von der hier verlangten Form direkt aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung ab. Man bildet aus dieser eine Quotientengleichung, welche für einen bestimmten, für die gegebene Lösung möglichen konstanten Faktor eine bestimmte Form haben mufs, wie das in Vk. und in VI., besonders in VIf. gezeigt ist. Aus der Quotientengleichung lassen sich dann leicht beliebig viele gleichwertige Quotienten ableiten und aus diesen, wie in a. angegeben, beliebig viele Gleichungen von der hier verlangten Form. Wir wollen das an einem Beispiele speciell durchführen.

$$\text{XIX b.}\quad \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{C}{D},$$

Es sei als Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

gegeben. In VIf. ist gezeigt, dafs bei dieser Lösung die konstanten Faktoren

$$\frac{a}{b},\ \frac{5a - 3b}{5b - 3a},\ \frac{8a + 3b}{8b + 3a}\ \text{u. s. w.}$$

vorkommen können und dafs die einfachsten zugehörigen Quotientengleichungen sind:

$$1)\ \frac{a + b + x}{b} = \frac{a}{a + b - x}$$

$$2)\ \frac{7a + 7b - 8x}{5b - 3a} = \frac{5a - 3b}{7a + 7b + 8x}$$

$$3)\ \frac{7a + 7b - 5x}{8b + 3a} = \frac{8a + 3b}{7a + 7b + 5x}.$$

Für die Gleichung 1) hat man, wenn man den Wert der Quotienten mit X bezeichnet, wie es oben vielfach geschehen ist, nach dem KS.

$$X = \frac{a + b + x}{b} = \frac{a}{a + b - x} = \frac{2a + b + x}{2b + a - x} = \frac{x + b}{x - a}\ \text{etc.}$$

Das Produkt der beiden ersten Quotienten giebt X^2. Den Wert von X^2 findet man aber auch, wenn man einen Quotienten zum Quadrat erhebt oder zwei Quotienten mit einander multiplicirt. Man hat daher die Gleichungen:

14. $\left(\frac{2a + b + x}{2b + a - x}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a + b + x}{a + b - x}$

L. $x = a - b,\ \sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

15. $\left(\frac{x + b}{x - a}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{x + b + x}{a + b - x}$

L. wie in 14.

16. $\frac{2a + b + x}{2b + a - x}\cdot\frac{x + b}{x - a} = \frac{a}{b}\cdot\frac{a + b + x}{a + b - x}$

L. $x = \frac{(a + b)^2}{a - b},\ \sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

Für den zweiten oben angegebenen konstanten Faktor findet man aus der entsprechenden Gleichung 2) aufser den angegebenen Quotienten nach dem KS. auch die gleichwertigen Quotienten

$$\frac{3a+b-2x}{3b+a+2x} = \frac{7a-3x}{5a+8b+7x} = \frac{8a+5b-7x}{7b+3x} \text{ u. s. w.}$$

und erhält daher die Gleichungen:

17. $$\left(\frac{3a+b-2x}{3b+a+2x}\right)^2 = \frac{5a-3b}{5b-3a} \cdot \frac{7a+7b-8x}{7a+7b+8x}$$

L. $x = \frac{1}{2}(b-a)$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

18. $$\frac{8a+5b-7x}{8b+5a+7x} \cdot \frac{7a-3x}{7b+3x} = \frac{5a-3b}{5b-3a} \cdot \frac{7a+7b-8x}{7a+7b+8x}$$

L. wie in 17.

Für den dritten konstanten Faktor findet man aus der Gleichung 3) in derselben Weise:

19. $$\left(\frac{3a+2b-x}{3b+2a+x}\right)^2 = \frac{8a+3b}{8b+3a} \cdot \frac{7a+7b-5x}{7a+7b+5x}$$

L. $x = \frac{7}{11}(b-a)$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

20. $$\frac{5a+8b-7x}{5b+8a+7x} \cdot \frac{7a+3x}{7b-3x} = \frac{8a+3b}{8b+3a} \cdot \frac{7a+7b-5x}{7a+7b+5x}$$

L. wie in 19.

Man kann aus den oben angegebenen Quotientengleichungen allgemeine Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten, indem man zunächst aus den beiden angeführten gleichen Quotienten nach dem KS. allgemeine gleichwertige Quotienten ableitet, X^2 bildet u. s. w. So findet man aus der Gleichung 1)

21. $$\frac{(a+b+x)m+an}{(a+b-x)n+bm} \cdot \frac{(a+b+x)p+aq}{(a+b-x)q+bp} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b+x}{a+b-x}$$

L. $x = \frac{anq-bmp}{anq+bmp}(a+b)$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Für die Auflösung der Gleichung ist das bei 9 in XVII. Gesagte zu beachten. Setzt man für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 1, -1, 1, -1; 3) 1, 1, 1, -1, so erhält man die Gleichungen 14, 15 und 16.

In derselben Weise hat man aus der Gleichung 2) für den zweiten oben angegebenen konstanten Faktor die allgemeine Gleichung

22. $$\frac{(7a+7b-8x)m+(5a-3b)n}{(7a+7b+8x)n+(5b-3a)m} \cdot \frac{(7a+7b-8x)p+(5a-3b)q}{(7a+7b+8x)q+(5b-3a)p} = \frac{5a-3b}{5b-3a} \cdot \frac{7a+7b-8x}{7a+7b+8x}$$

L. $x = \frac{7}{8}(a+b) \cdot \frac{(5b-3a)mp-(5a-3b)nq}{(5b-3a)mp+(5a-3b)nq}$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Setzt man hierin für m, n, p, q bezw. 1) 1, 1, 1, 1; 2) 3, 7, 7, 3, so erhält man die Gleichungen 17 und 18.

Auch das Vorziehen eines Faktors aus einer Quotientengleichung, wie es in Eb. (22), VIb., IXc. und XVIIa. vielfach vorgekommen ist, wird zweckmäfsig zur Formation von Gleichungen oben stehender Art benutzt.

So hat man für die schon oben gegebene Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + ab + b^2}$$

zunächst die Quotientengleichung

$$(1) \quad \frac{a+b+x}{b} = \frac{a}{a+b-x} \; (= X),$$

also nach dem KS. auch

$$(2) \quad X = \frac{3a+b+x}{2a+3b-2x} = \frac{3a+2b+2x}{a+3b-x}.$$

Aus (1) ergiebt sich nach dem angegebenen Verfahren und nach dem KS.

$$(3) \quad X = \frac{a}{b} \left| \frac{a+b+x}{a} = \frac{b}{a+b-x} \right| = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a}{x-b}.$$

Ebenso aus (2)

$$(4) \quad \begin{aligned} X &= \frac{3a+b+x}{a+3b-x} \left| \frac{a+3b-x}{2a+3b-2x} = \frac{3a+2b+2x}{3a+b+x} \right| \\ &= \frac{3a+b+x}{a+3b-x} \cdot \frac{4a+5b+x}{5a+4b-x}. \end{aligned}$$

Daher aus (3) und (4) die Gleichung

23. $$\frac{3a+b+x}{3b+a-x} \cdot \frac{4a+5b+x}{4b+5a-x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x+a}{x-b}$$

L. $x = \frac{5a^2+14ab+5b^2}{a-b}$, $\sqrt{a^2+ab+b^2}$.

Man kann auch ein zweimaliges Vorziehen eines Faktors aus einer Quotientengleichung anwenden. Für die Lösung

$$x = \sqrt{ab}$$

hat man z. B. direkt und nach dem KS.

$$(5) \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b} = \frac{a+x}{b+x} \; (= X).$$

Hieraus durch Vorziehen des Faktors $\frac{a}{b}$ und nach dem KS.

$$X = \frac{a}{b} \left| \frac{b}{x} = \frac{x}{a} \right| = \frac{a}{b} \cdot \frac{b+2x}{x+2a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2b+x}{2x+a}.$$

Aus den beiden letzten gleichen Ausdrücken zieht man wieder einen Faktor vor und hat nach dem KS.

$$X = \frac{a}{b} \cdot \frac{b+2x}{2x+a} \left| \frac{2x+a}{x+2a} = \frac{2b+x}{b+2x} \right|, \text{ also}$$

$$(6) \quad X = \frac{a}{b} \cdot \frac{b+2x}{2x+a} \cdot \frac{a+2b+3x}{b+2a+3x}.$$

Mithin aus (5) und (6)

24. $\frac{a+x}{b+x} \cdot \frac{2a+b+3x}{2b+a+3x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b+2x}{a+2x}$

L. $x = -\frac{a+b}{3}, \sqrt{ab}$.

Auch das in Vg. erörterte Verfahren läſst sich hier oft mit Vorteil anwenden.

c. Nach den in b. gemachten Bemerkungen wird es leicht sein, die oben vorgeführten Gleichungen aufzustellen.

Für 242_1 ist die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}.$$

Man hat also

$$x^2 = (a-b)^2 + 16ab$$

$$\frac{x+a-b}{4b} = \frac{4a}{x-a+b} = \frac{3a+b-x}{x-a-3b} \; (= X).$$

Bildet man X^2 einerseits durch Quadriren des dritten Quotienten, andrerseits durch Multiplikation der beiden ersten und setzt die gewonnenen Ausdrücke einander gleich, so giebt das die Gleichung 242_1.

Für 242_2 ist die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}.$$

Man hat daher

$$x^2 = (a - b)^2 + ab$$

$$(7) \quad \frac{x - a + b}{b} = \frac{a}{x + a - b} \; (= X)$$

und weiter nach dem KS.

$$(8) \quad X = \frac{x + b}{x + a} = \frac{2x - a + 2b}{x + a + b} = \frac{x + a + b}{2x + 2a - b}.$$

Aus (7) hat man ferner

$$(9) \quad X = \frac{a}{b} \left| \frac{x - a + b}{a} = \frac{b}{x + a - b} \right| = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + 2b - a}{x + 2a - b}.$$

Bestimmt man daher aus (8) und (9) den Wert von X^2 durch Multiplikation in doppelter Weise, so erhält man die Gleichung

$$\frac{2x - a + 2b}{2x - b + 2a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + 2b - a}{x + 2a - b} \cdot \frac{x + b}{x + a}.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung 242_2.

Für dieselbe Lösung hat man auch

$$\frac{x + a - b}{b} = \frac{a}{x - a + b} \; (= X).$$

Daher nach dem KS. einerseits

$$(10) \quad X = \frac{a + b - x}{2x - 2a + b} = \frac{2x + a - 2b}{a + b - x} = \frac{x - b}{a - x}.$$

Andrerseits durch Herausziehen des Faktors $\frac{a}{b}$

$$(11) \quad X = \frac{a}{b} \left| \frac{x + a - b}{a} = \frac{b}{x - a + b} \right| = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a}{x + b}.$$

Bestimmt man X^2 aus (10) und (11) in doppelter Weise, so erhält man leicht

$$\frac{2x + a - 2b}{2x + b - 2a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a}{x + b} \cdot \frac{x - b}{a - x}.$$

Die Gleichung ist identisch mit der Gleichung 242_3.

Für die Gleichung 242_4 hat man nach (32) in VI.

$$(12) \quad \frac{3x - 2a + 2b}{4b - a} = \frac{4a - b}{3x + 2a - 2b} \; (= X).$$

L. $x = \sqrt{ab}$.

Hieraus

$$X=\frac{4a-b}{4b-a}\left|\frac{3x-2a+2b}{4a-b}=\frac{4b-a}{3x+2a-2b}\right|.$$

Aus den beiden in Klammern stehenden gleichen Quotienten kann man nach dem KS. wieder zwei andere gleiche Quotienten ableiten und erhält

$$X=\frac{4a-b}{4b-a}\cdot\frac{2b-x}{2x-b}=\frac{4a-b}{4b-a}\cdot\frac{2x-a}{2a-x}.$$

Aus den beiden ungleichen Quotienten kann man, wie es in (6) geschehen ist, wieder einen Quotienten aussondern, so dafs man erhält

$$X=\frac{4a-b}{4b-a}\cdot\frac{2b-x}{2a-x}\left|\frac{2a-x}{2x-b}=\frac{2x-a}{2b-x}\right|,\text{ also}$$

$$(13)\quad X=\frac{4a-b}{4b-a}\cdot\frac{2b-x}{2a-x}\cdot\frac{a+x}{b+x}.$$

Aus (12) folgt nach dem KS.

$$(14)\quad X=\frac{x+2a}{2x+a}.$$

Daher endlich aus (13). und (14)

$$\frac{2a+x}{2x+a}=\frac{4a-b}{4b-a}\cdot\frac{2b-x}{2a-x}\cdot\frac{a+x}{b+x}.$$

Die Gleichung ist identisch mit 242_4.

Die Gleichung 242_5 ist schon oben in 13 aufgestellt.

Für die Gleichung 242_6 hat man nach der dritten Gleichung bei (45) in VIf., wenn man $-a$ statt a setzt, und nach dem KS.

$$(15)\quad \frac{a+b-4x}{15b-a}=\frac{15a-b}{a+b+4x}=\frac{4a-x}{4b+x}\ (=X).$$

Setzt man das Quadrat des dritten Quotienten gleich dem Produkt der beiden ersten, so erhält man die Gleichung 242_6.

Für die Gleichung 242_7 hat man aus der ersten Gleichung bei (45) in VIf., wenn man $-b$ statt b setzt, und nach dem KS.

$$\frac{13a+13b+3x}{4(5b+2a)}=\frac{4(5a+2b)}{13a+13b-3x}=\frac{11a+7b+x}{11b+7a-x}.$$

Hieraus folgt wie bei (15) die gesuchte Gleichung.

Für die Gleichung 242_8 hat man nach den in VIf. für die Lösung 1) gemachten Entwickelungen und nach dem KS. die gleichen Quotienten

$$\frac{8x+3a-3b}{9b-a} = \frac{9a-b}{8x-3a+3b} = \frac{3a-x}{3x-a} = \frac{3x-b}{3b-x}.$$

Setzt man das Produkt des 3. und 4. Quotienten gleich dem Produkt des 1. und 2. Quotienten, so erhält man die gesuchte Gleichung.

Für die Gleichung 242_9 hat man nach VIf. und nach dem KS.

$$\frac{5x+6a-6b}{9b-4a} = \frac{9a-4b}{5x-6a+6b} = \frac{3a-2x}{3x-2a} = \frac{3x-2b}{3b-2x} \text{ u. s. w.}$$

XX. $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}$; $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H}$.

243. $\left(\frac{a+2b-3x}{b+2a-3x}\right)^2 = \frac{a-2x}{b-2x} \cdot \frac{2b-x}{2a-x}$

L. $x = \frac{2}{5}(a+b),\ \sqrt{ab}.$

243_1. $\left(\frac{2a+b-x}{b+x}\right)^2 = \frac{3a+b-x}{b+2x} \cdot \frac{3a+2b-2x}{2b+x}$

L. $x = a,\ b,\ b.$

243_2. $\left(\frac{a+3b-x}{a+2x}\right)^2 = \frac{a+2b-x}{a+x} \cdot \frac{a+5b-x}{a+4x}$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a(a+b)}{a+4b}.$

243_3. $\frac{2a+b-x}{2b+a-x} \cdot \frac{a+x}{b+x} = \frac{4a+b-x}{4b+a-x} \cdot \frac{a+3x}{b+3x}$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a+b}{4}.$

243_4. $\frac{3a+b-x}{3b+a-x} \cdot \frac{2a+3b-2x}{2b+3a-2x} = \frac{2a+x}{2b+x} \cdot \frac{b+2x}{a+2x}$

L. $x = a,\ b,\ \frac{a+b}{2}.$

Gleichungen von dieser Form lassen sich am einfachsten in beliebiger Anzahl aus den Darstellungen von t ableiten, die zu symmetrischen Gleichungen des vierten Grades gehören. Setzt man das Produkt zweier einfachen Darstellungen von t gleich dem Produkte zweier anderer Darstellungen von t und x statt r und erhebt zum Quadrat, so ist die Gleichung fertig. Die so aufgestellten Gleichungen müssen jedoch im allgemeinen vom vierten Grade sein, wie die in VII. und IX. behandelten Gleichungen im allgemeinen vom dritten Grade sein mufsten, wenn die Koefficienten nicht so gewählt waren, dafs sich x^3 forthebt. Die hier vorgeführten Gleichungen sind alle kubisch. Die Wahl der Darstellungen von t ist daher insofern beschränkt, als man die Darstellungen so auswählen mufs, dafs sich in der formirten Gleichung x^4 forthebt. Das ist, wenn sich solche Darstellungen nicht direkt darbieten, immer leicht zu bewerkstelligen.

Aus den beiden ersten Darstellungen von t bei (6) in Vb. hat man, wenn man quadrirt und zugleich x statt r setzt,

$$t^2 = \frac{a - b + x}{6b} = \frac{6a}{b - a + x} \; (= X).$$

Hieraus folgt nach dem KS. allgemein

$$X = \frac{(a - b + x)m + 6an}{(b - a + x)n + 6bm}.$$

Setzt man hierin für m und n bezw. 1) 1, 1; 2) 2, 1; 3) 1, 2; 4) 3, 1; 5) 1, 3, so erhält man für X die Quotienten:

$$\frac{7a - b + x}{7b - a + x} = \frac{8a - 2b + 2x}{13b - a + x} = \frac{13a - b + x}{8b - 2a + 2x}$$

$$= \frac{9a - 3b + 3x}{19b - a + x} = \frac{19a - b + x}{9b - 3a + 3x} \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen gleichen Quotienten folgen nach dem angegebenen Verfahren, indem man X^2 sucht, die Gleichungen:

1. $\left(\frac{7a - b + x}{7b - a + x}\right)^2 = \frac{4a - b + x}{4b - a + x} \cdot \frac{13a - b + x}{13b - a + x}$

   L. $x = a + b, \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

2. $\left(\frac{7a - b + x}{7b - a + x}\right)^2 = \frac{3a - b + x}{3b - a + x} \cdot \frac{19a - b + x}{19b - a + x}$

   L. wie bei 1.

3. $\frac{4a - b + x}{4b - a + x} \cdot \frac{13a - b + x}{13b - a + x} = \frac{3a - b + x}{3b - a + x} \cdot \frac{19a - b + x}{19b - a + x}$

   L. wie bei 1.

Auch die in IV. behandelten Quotientengleichungen, die aus Darstellungen von t abgeleitet sind, welche zu symmetrischen Gleichungen des vierten Grades gehören, lassen sich sehr zweckmäfsig zur Aufstellung von Gleichungen der oben stehenden Art benutzen. Hat man z. B. die Quotientengleichung

$$(1) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

so hat man auch allgemein

$$\frac{Am + Cn}{Bm + Dn} = \frac{Ap + Cq}{Bp + Dq} = \frac{Am_1 + Cn_1}{Bm_1 + Dn_1} \text{ u. s. w.}$$

Daher die allgemeinen Gleichungen

$$\text{I.} \quad \left(\frac{Am + Cn}{Bm + Dn}\right)^2 = \frac{Ap + Cq}{Bp + Dq} \cdot \frac{Ap_1 + Cq_1}{Bp_1 + Dq_1}$$

$$\text{II.} \quad \frac{Am + Cn}{Am + Dn} \cdot \frac{Am_1 + Cn_1}{Bm_1 + Dn_1} = \frac{Ap + Cq}{Bp + Dq} \cdot \frac{Ap_1 + Cq_1}{Bp_1 + Dq_1}.$$

Die Koefficienten m, n, p, q u. s. w. sind so zu wählen, dafs die Gleichung kubisch wird oder dafs x^4 fortfällt, was immer leicht in vielfacher Weise geschehen kann.

Die Quotientengleichung 18 vorn in IV. heifst

$$(2) \quad \frac{x + a + 2b}{x + a - 2b} = \frac{b - 2a + 2x}{b + 2a - 2x}$$

$$\text{L. } x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Um zunächst die Gleichung I anzuwenden, wählt man m, n, p und q beliebig und darnach p_1 und q_1 so, dafs x^4 fortfällt. Soll x^4 in I fortfallen, so mufs

$$\left(\frac{m + 2n}{m - 2n}\right)^2 = \frac{p + 2q}{p - 2q} \cdot \frac{p_1 + 2q_1}{p_1 - 2q_1}$$

werden. Das geschieht, wenn man 1) $m = 1$, $n = 0$, $p = 1$, $q = 1$, also $p_1 = 1$, $q_1 = -1$; 2) $m = 1$, $n = 1$, $p = 1$, $q = -1$, also $p_1 = 13$, $q_1 = 7$ setzt. Dann erhält man, da wegen (1) und (2) $A = x + a + 2b$, $B = x + a - 2b$ etc. ist, aus I folgende Gleichungen:

$$4. \quad \left(\frac{x + a + 2b}{x + a - 2b}\right)^2 = \frac{3b - a + 3x}{3b + a - 3x} \cdot \frac{b + 3a - x}{b - 3a + x}$$

$$\text{L. } x = \tfrac{5}{3}a, \ \sqrt{a^2 + b^2}.$$

5. $\left(\frac{3x-a+3b}{x+b-3a}\right)^2=\frac{3a+b-x}{3b+a-3x}\cdot\frac{33b-a+27x}{19b+x-27a}$

L. $x=-\frac{(25a-15b)b}{16a-15b},\ \sqrt{a^2+b^2}$.

Will man die Gleichung II benutzen, so müssen, wenn die Gleichung kubisch werden soll, die Koefficienten der Bedingung genügen

$$\frac{m+2n}{m-2n}\cdot\frac{m_1+2n_1}{m_1-2n_1}=\frac{p+2q}{p-2q}\cdot\frac{p_1+2q_1}{p_1-2q_1}.$$

Setzt man daher 1) $m=1$, $n=0$, $m_1=0$, $n_1=1$, $p=1$, $q=1$, also $p_1=4$, $q_1=-1$; 2) $m=1$, $n=0$, $m_1=0$, $n_1=1$, $p=3$, $q=1$, also $p_1=4$, $q_1=-3$, so erhält man:

6. $\frac{x+a+2b}{x+a-2b}\cdot\frac{b-2a+2x}{b+2a-2x}=\frac{3b-a+3x}{3a-b-x}\cdot\frac{6a+7b+2x}{6x-9b+2a}$

L. $x=\frac{15b^2}{16a},\ \sqrt{a^2+b^2}$.

7. $\frac{x+a+2b}{x+a-2b}\cdot\frac{b-2a+2x}{b+2a-2x}=\frac{5x+a+7b}{5a+x-5b}\cdot\frac{10a-2x+5b}{10x-2a-11b}$

L. wie in 6.

Am einfachsten verfährt man auch hier bei der Aufstellung der Gleichungen, wenn man die Lösung als gegeben annimmt und aus dieser zunächst eine Quotientengleichung formirt, wie es oben vielfach gezeigt ist. So hat man z. B., wenn

$$x=\sqrt{ab}$$

als Lösung gegeben ist, zunächst

$$(3)\quad \frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

und hieraus nach dem KS.

$$\frac{a+x}{x+b}=\frac{a-x}{x-b}=\frac{a+2x}{x+2b}=\frac{2a+x}{2x+b}=\frac{a+3x}{x+3b}=\frac{3a+x}{3x+b}\text{ u.s.w.}$$

Daher die Gleichungen:

8. $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^2=\frac{a+2x}{b+2x}\cdot\frac{2a+x}{2b+x}$

L. $x=0,\ \sqrt{ab}$.

9. $\left(\frac{a-x}{b-x}\right)^2=\frac{a+3x}{b+3x}\cdot\frac{3a+x}{3b+x}$

L. wie in 8.

10. $\frac{a+2x}{b+2x}\cdot\frac{2a+x}{2b+x}=\frac{a+3x}{b+3x}\cdot\frac{3a+x}{3b+x}$

L. wie in 8.

Man kann auch allgemeiner in derselben Weise bilden:

11. $\frac{a+nx}{b+nx}\cdot\frac{x+an}{x+bn}=\frac{a+px}{b+px}\cdot\frac{x+ap}{x+bp}$

L. $x=0$, $\sqrt{ab}$.

12. $\frac{a+nx}{b+px}\cdot\frac{x+ap}{x+bn}=\frac{a-nx}{b-px}\cdot\frac{x-ap}{x-bn}$

L. wie in 11.

Aus der Quotientengleichung (3) hat man durch korr. Add. und nach dem KS. auch

$$\frac{a-2x}{2a-x}=\frac{x-2b}{2x-b}=\frac{a+2b-3x}{b+2a-3x}.$$

Setzt man das Quadrat des dritten Quotienten gleich dem Produkt aus den beiden ersten, so erhält man die Gleichung 243.

Für die Aufstellung der folgenden Gleichungen mufs man die einfache quadratische Gleichung

$$x^2-(a+b)x+ab=0,$$

deren Wurzeln

$$x_1=a,\quad x_2=b$$

sind, zunächst in eine Quotientengleichung verwandeln, z. B.

$$(4)\quad \frac{a+b-x}{b}=\frac{a}{x}.$$

Hieraus erhält man nach dem KS. die gleichwertigen Quotienten

$$(5)\ \frac{2a+b-x}{b+x}=\frac{3a+b-x}{b+2x}=\frac{3a+2b-2x}{2b+x}=\frac{4a+b-x}{b+3x}.$$

Setzt man das Quadrat des ersten Quotienten gleich dem Produkt aus dem zweiten und dritten Quotienten, so so erhält man 243_1.

Aus der ein wenig veränderten Quotientengleichung

$$\frac{a+b-x}{a}=\frac{b}{x}$$

ergeben sich nach dem KS. die gleichwertigen Quotienten:

$$(6)\quad \frac{a+2b-x}{a+x} = \frac{a+3b-x}{a+2x} = \frac{a+4b-x}{a+3x}$$
$$= \frac{a+5b-x}{a+4x} = \frac{2a+3b-2x}{2a+x} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man das Quadrat des zweiten Quotienten gleich dem Produkt aus dem ersten und vierten Quotienten, so erhält man die Gleichung 243_2.

Dividirt man den ersten und vierten Quotienten in (5) bezw. durch den ersten und dritten Quotienten in (6) und setzt die erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Gleichung 243_3.

Dividirt man den zweiten und dritten Quotienten in (5) bezw. durch den zweiten und fünften Quotienten in (6) und setzt die gewonnenen Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Gleichung 243_4.

XXI. $\frac{A^2 \pm B^2}{C^2 \pm D^2} = \left(\frac{E}{F}\right)^2$, kubisch.

243_5. $\frac{(x-a+b)^2+b^2}{(x+a-b)^2+a^2} = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2$

L. $x = a+b, \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

243_6. $\frac{(x-a+b)^2-b^2}{(x+a-b)^2-a^2} = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2$

L. $x = a+b, a, b$.

243_7. $\frac{(x-a+b)^2+b^2}{(x+a-b)^2+a^2} = \left(\frac{x-a+2b}{x-b+2a}\right)^2$

L. $x = a+b, \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

243_8. $\frac{(x-a+b)^2-b^2}{(x+a-b)^2-a^2} = \left(\frac{x-a+2b}{x-b+2a}\right)^2$

L. $x = a+b, a-2b, b-2a$.

243_9. $\frac{(x+a-b)^2+36a^2}{(x-a+b)^2+36b^2} = \left(\frac{7a-b+x}{7b-a+x}\right)^2$

L. $x = a+b, \sqrt{a^2+34ab+b^2}$.

243_{10}. $\frac{(x + a - b)^2 - 36a^2}{(x - a + b)^2 - 36b^2} = \left(\frac{5a + b - x}{5b + a - x}\right)^2$

L. $x = a + b,\ 5a + b,\ a + 5b.$

243_{11}. $\frac{(a - 2x)^2 + (2b - x)^2}{(b - 2x)^2 + (2a - x)^2} = \left(\frac{a + 2b - 3x}{b + 2a - 3x}\right)^2$

L. $x = \frac{2}{5}(a + b),\ \sqrt{ab}.$

243_{12}. $\frac{(a - 2x)^2 - (2b - x)^2}{(b - 2x)^2 - (2a - x)^2} = \left(\frac{x - a + 2b}{x - b + 2a}\right)^2$

L. $x = \frac{2}{5}(a + b),\ a - 2b,\ b - 2a.$

243_{13}. $\frac{(7a - 9b + 3x)^2 + (3a + 3b - x)^2}{(7b - 9a + 3x)^2 + (3a + 3b - x)^2} = \left(\frac{5a - 3b + x}{5b - 3a + x}\right)^2$

L. $x = 3(a + b),\ \sqrt{9a^2 - 14ab + 9b^2}.$

243_{14}. $\frac{(7a - 9b + 3x)^2 - (3a + 3b - x)^2}{(7b - 9a + 3x)^2 - (3a + 3b - x)^2} = \left(\frac{a - 3b + x}{b - 3a + x}\right)^2$

L. $x = 3(a + b),\ 3a - b,\ 3b - a.$

Gleichungen vorstehender Art sind aus den Darstellungen von t, welche sich aus symmetrischen Gleichungen des vierten Grades ergeben, oder aus Quotientengleichungen, welche sich aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung direkt ableiten lassen, sehr leicht zu formiren. Sie sind ihrer Form nach vom vierten Grade; es hebt sich jedoch bei allen x^4 fort; sie haben daher nur drei Wurzeln.

Erhebt man z. B. die bei (7) in I. aufgeführten Darstellungen von t zur vierten Potenz und setzt x statt r, so hat man

$$(1)\quad \begin{aligned} \left(\frac{3a + 2b + 3x}{3a - 2b + 3x}\right)^2 &= \left(\frac{3b - 2a + 2x}{3b + 2a - 2x}\right)^2 \\ = \left(\frac{12x + 13b}{12a + 5b}\right)^2 &= \left(\frac{12a - 5b}{12x - 13b}\right)^2 \\ x &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Man kann daher nach dem KS. die Gleichungen hinschreiben:

1. $\frac{(12x + 13b)^2 + (12a - 5b)^2}{(12a + 5b)^2 + (12x - 13b)^2} = \left(\frac{3b - 2a + 2x}{3b + 2a - 2x}\right)^2$

L. $x = -\frac{13}{5}a,\ \sqrt{a^2 + b^2}.$

2. $\frac{(12x + 13b)^2 + (12a - 5b)^2}{(12a + 5b)^2 + (12x - 13b)^2} = \left(\frac{3a + 2b + 3x}{3a - 2b + 3x}\right)^2$

L. wie in 1.

Man hat bei der Bildung der Gleichung darauf zu achten, dafs x^4 sich forthebt.

Man kann auch ganz allgemein aus den in (1) gegebenen Quadraten nach dem KS. bilden:

$$(2)\quad \left(\frac{(12x+13b)m+(12a-5b)n}{(12a+5b)m+(12x-13b)n}\right)^2 = \left(\frac{(12x+13b)p+(12a-5b)q}{(12a+5b)p+(12x-13b)q}\right)^2.$$

Soll in der zu formirenden Gleichung eine der Gröfsen rechts stehen, welche in den beiden aufgestellten Gleichungen rechts stehen, so mufs, wenn man die in (2) aufgestellten Gröfsen links benutzen will,

$$\frac{144m^2 + 144p^2}{144n^2 + 144q^2} = 1, \text{ d. h.}$$

$$(3)\quad m^2 + p^2 = n^2 + q^2$$

werden, damit sich schliefslich x^4 forthebt. Die Gleichung (3) wird am einfachsten erfüllt durch $p = n$, $q = m$. Dann erhält man aus (2) und (1) allgemein

$$3.\quad \frac{((12x+13b)m+(12a-5b)n)^2 + ((12x+13b)n+(12a-5b)m)^2}{((12x-13b)n+(12a+5b)m)^2 + ((12x-13b)m+(12a+5b)n)^2}$$
$$= \left(\frac{3a+2b+3x}{3a-2b+3x}\right)^2$$

L. $x = -\frac{13}{5}a$, $\sqrt{a^2+b^2}$. *)

Für m und n kann man beliebige Zahlen setzen. — Wie man die Gleichung (3) auch auf andere Weise als durch die Annahme $p = n$, $q = m$ erfüllen kann, ist oben in VIIc. gesagt. Doch werden dann die sich ergebenden Gleichungen durchweg etwas unförmlich.

Setzt man in den aufgestellten Gleichungen links die Differenzen statt der Summen, so erhält man Gleichungen

*) Die Auflösung ist sehr umständlich, wenn man die Gleichung direkt angreift. Man setze $12x + 13b = A$, $12a - 5b = B$, $12a + 5b = C$, $12x - 13b = D$. Dann erhält man für die Gröfsen rechts $4(A + B)$ und $4(C + D)$. Man kommt mit Hülfe des KS. auf $\frac{AB}{CD} = \left(\frac{A+B}{C+D}\right)^2$, $\left(\frac{A-B}{C-D}\right)^2 = \left(\frac{A+B}{C+D}\right)^2$, $\frac{A-B}{C-D} = \pm\frac{A+B}{C+D}$, d. h.

$$1)\ \frac{A}{B} = \frac{C}{D},\quad 2)\ \frac{A}{B} = \frac{D}{C}.$$

vom vierten Grade, da sich x^4 nicht forthebt. So erhält man aus (1) statt der Gleichung 1

4. $\frac{(12x + 13b)^2 - (12a - 5b)^2}{(12a + 5b)^2 - (12x - 13b)^2} = \left(\frac{3b - 2a + 2x}{3b + 2a - 2x}\right)^2$

L. $x = \frac{2a \pm 3b}{2}$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Denkt man sich aber in den aufgestellten Gleichungen 1 und 2 im Nenner die Summanden umgestellt und setzt dann die Differenzen statt der Summen, so erhält man kubische Gleichungen. So erhält man statt der Gleichung 4 aus der Gleichung 1

5. $\frac{(12x + 13b)^2 - (12a - 5b)^2}{(12x - 13b)^2 - (12a + 5b)^2} = \left(\frac{3b - 2a + 2x}{3b + 2a - 2x}\right)^2$

L. $x = -\frac{13}{5}a$, $\frac{2a \pm 3b}{2}$.

Die Gleichung 4 hat zwei Wurzeln $x = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ mit der Gleichung 1 gemeinsam, die Gleichung 5 nur eine, $x = -\frac{13}{5}a$. Diese Wurzel geht für die Gleichung 5 aus der Gleichung hervor

$$\frac{(12x + 13b) + (12a - 5b)}{(12x - 13b) + (12a + 5b)} = \frac{2x - 2a + 3b}{2x - 2a - 3b},\text{*)}$$

welche noch zu lösen bleibt, wenn man die Faktoren

$$(12x + 13b) - (12a - 5b) = 6(2x - 2a + 3b) \text{ und}$$
$$(12x - 13b) - (12a + 5b) = 6(2x - 2a - 3b)$$

ausgeschieden hat. Diese Faktoren, $= 0$ gesetzt, geben die beiden andern Wurzeln.

Wie die Gleichung 5 aus der Gleichung 1 abgeleitet ist, so sind auch die Gleichungen 243_6 aus 243_5, 243_8 aus 243_7 u. s. w. abgeleitet.

In derselben Weise, wie die Gleichungen 1, 2, 4 und 5 gebildet sind, ergeben sich aus den Darstellungen von t bei (11) in I, wenn man a und b vertauscht, folgende Gleichungen:

6. $\frac{(4x + 5a)^2 + (4b + 3a)^2}{(4x - 5a)^2 + (4b - 3a)^2} = \left(\frac{a - 2b + 2x}{a + 2b - 2x}\right)^2$

L. $x = \frac{5}{3}b$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

---

*) Lösung durch korr. Add.

7. $\frac{(4x + 5a)^2 + (4b + 3a)^2}{(4x - 5a)^2 + (4b - 3a)^2} = \left(\frac{x + 2a + b}{x - 2a + b}\right)^2$

L. wie in 6.

8. $\frac{(4x + 5a)^2 - (4b + 3a)^2}{(4x - 5a)^2 - (4b - 3a)^2} = \left(\frac{a - 2b + 2x}{a + 2b - 2x}\right)^2$

L. $x = \frac{5}{3}b, \frac{2b \pm a}{2}$.

9. $\frac{(4x + 5a)^2 - (4b + 3a)^2}{(4b - 3a)^2 - (4x - 5a)^2} = \left(\frac{a - 2b + 2x}{a + 2b - 2x}\right)^2$

L. $x = \frac{2b \pm a}{2}, \sqrt{a^2 + b^2}$.

Will man zur Aufstellung von Gleichungen der oben stehenden Art die Lösung als gegeben annehmen, so mufs man aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung zunächst eine Quotientengleichung bilden und aus dieser nach dem KS. gleichwertige Quotienten suchen. Dann ist die Bildung solcher Gleichungen nach den oben gegebenen Beispielen leicht. Man hat nur darauf zu achten, dafs sich x^4 forthebt. Die Bildung solcher Gleichungen kann man sich noch wesentlich durch Benutzung einer Eigentümlichkeit erleichtern, welche allen oben vorgeführten Gleichungen, auch der Gleichung 3, gemeinsam ist: Es stehen rechts überall die Summen oder Differenzen der links vorkommenden Gröfsen, wenigstens bis auf einen gemeinsamen Zahlenfaktor. So hat man in 243_{11}:

$$(a - 2x) + (2b - x) = a + 2b - 3x$$
$$(b - 2x) + (2a - x) = b + 2a - 3x.$$

Ähnlich in 243_{12}:

$$(a - 2x) - (2b - x) = -(x - a + 2b)$$
$$(b - 2x) - (2a - x) = -(x - b + 2a) \text{ u. s. w.}$$

Die angegebene Eigentümlichkeit erleichtert die Bildung solcher Gleichungen und ihre Auflösung wesentlich; sie ist aber nicht notwendig. Wenn sich x^4 forthebt und man weifs, dafs die Gleichung zwei Wurzeln hat, z. B. $x_1 = a$ und $x_2 = b$, oder $x = \pm\sqrt{\zeta a^2 + \eta ab + \vartheta b^2}$, so mufs die dritte Wurzel von selbst rational sein; denn nach Ausscheidung der beiden angegebenen Wurzeln bleibt nur noch eine Gleichung vom ersten Grade zu lösen übrig.

Ist z. B. die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gegeben, so hat man zunächst als einfachste Quotientengleichung

$$(4) \quad \frac{a+x}{b} = \frac{b}{a-x}$$

und kann daher sofort hinschreiben:

10. $\frac{(a+x)^2 + b^2}{(a-x)^2 + b^2} = \left(\frac{a+b+x}{a+b-x}\right)^2$

L. $x = 0, \sqrt{a^2 - b^2}$.

11. $\frac{(a+x)^2 - b^2}{(a-x)^2 - b^2} = \left(\frac{a+b+x}{a+b-x}\right)^2$

L. $x = 0, \pm(a+b)$.

Man hätte auch aus der Lösung ebenso gut bilden können

$$(5) \quad \frac{a+b}{x} = \frac{x}{a-b}.$$

Hieraus kann man wieder sofort hinschreiben:

12. $\frac{(a+b)^2 + x^2}{(a-b)^2 + x^2} = \left(\frac{b+a-x}{b-a+x}\right)^2$

L. $x = 0, \sqrt{a^2 - b^2}$.

13. $\frac{(a+b)^2 - x^2}{(a-b)^2 - x^2} = \left(\frac{b+a-x}{b-a+x}\right)^2$

L. $x = 0, a \pm b$.

Man kann auch aus (4) oder (5) nach dem KS. wieder andere gleichwertige Quotienten bilden und diese benutzen. So folgt aus (5):

$$\frac{a+b+2x}{x+2a-2b} = \frac{x+2a+2b}{a-b+2x} = \frac{b+a-x}{b-a+x} = \frac{a+b+x}{a-b+x}.$$

Hieraus hat man:

14. $\frac{(2a+2b+x)^2 + (a+b+2x)^2}{(2a-2b+x)^2 + (a-b+2x)^2} = \left(\frac{b+a-x}{b-a+x}\right)^2$

L. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

15. $\frac{(2a+2b+x)^2 + (a+b+2x)^2}{(2a-2b+x)^2 + (a-b+2x)^2} = \left(\frac{a+b+x}{a-b+x}\right)^2$

L. wie in 14.

16. $\frac{(2a+2b+x)^2 - (a+b+2x)^2}{(2a-2b+x)^2 - (a-b+2x)^2} = \left(\frac{b+a-x}{b-a+x}\right)^2$

L. $x = 0,\ a \pm b$.

17. $\frac{(2a+2b+x)^2 - (a+b+2x)^2}{(a-b+2x)^2 - (2a-2b+x)^2} = \left(\frac{b+a-x}{b-a+x}\right)^2$

L. $x = a \pm b,\ \sqrt{a^2 - b^2}$.

In den Gleichungen 10—17 ist die oben angegebene Eigentümlichkeit bewahrt; es stehen rechts die Summen oder Differenzen der links vorkommenden Gröfsen. Man kann jedoch noch viel allgemeiner verfahren. Aus (4) kann man auch bilden

$$\frac{(a+x)m + bn}{(a-x)n + bm} = \frac{(a+x)m_1 + bn_1}{(a-x)n_1 + bm_1} = \frac{(a+x)p + bq}{(a-x)q + bp}.$$

Hieraus folgt die allgemeine Gleichung

$$\frac{((a+x)m + bn)^2 + ((a+x)m_1 + bn_1)^2}{((a-x)n + bm)^2 + ((a-x)n_1 + bm_1)^2} = \left(\frac{(a+x)p + bq}{(a-x)q + bp}\right)^2.$$

Soll die Gleichung kubisch sein, so mufs

$$\frac{m^2 + m_1^2}{n^2 + n_1^2} = \frac{p^2}{q^2}$$

werden. Diese Gleichung wird sehr einfach erfüllt, wenn man in der bekannten Weise

$$m^2 - n^2 \text{ für } m,\quad 2mn \text{ für } m_1,$$
$$p^2 - q^2 \text{ für } n,\quad 2pq \text{ für } n_1$$

setzt. Dann ist $m^2 + n^2$ für p, $p^2 + q^2$ für q zu setzen. Man erhält daher die allgemeine Gleichung

18. $$\frac{((a+x)(m^2-n^2) + b(p^2-q^2))^2 + 4((a+x)mn + bpq)^2}{((a-x)(p^2-q^2) + b(m^2-n^2))^2 + 4((a-x)pq + bmn)^2}$$
$$= \left(\frac{(a+x)(m^2+n^2) + b(p^2+q^2)}{(a-x)(p^2+q^2) + b(m^2+n^2)}\right)^2$$

L. $x = \frac{(p^2+q^2)^2 - (m^2+n^2)^2}{(p^2+q^2)^2 + (m^2+n^2)^2}a,\ \sqrt{a^2 - b^2}$.

Setzt man $m = 2,\ n = 1,\ p = 3,\ q = 1$, so erhält man

19. $\frac{(3a+8b+3x)^2 + 4(2a+3b+2x)^2}{(3b+8a-8x)^2 + 4(2b+3a-3x)^2} = \left(\frac{a+2b+x}{b+2a-2x}\right)^2$

L. $x = \frac{3}{5}a,\ \sqrt{a^2 - b^2}$.

Die oben zu Anfang dieses Abschnitts vorgeführten Gleichungen sind nach den gemachten Erörterungen leicht zu formiren.

So hat man für die Lösung

$$(6) \quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

zunächst die gleichen Quotienten:

$$(7) \quad \frac{x - a + b}{a} = \frac{b}{x + a - b} = \frac{x - a}{b - x} = \frac{x - a + 2b}{x - b + 2a}.$$

Aus den ersten drei Quotienten ergiebt sich die Gleichung 243_5, da man im Quadrat $x - b$ statt $b - x$ setzen kann. Aus 243_5 ist 243_6 abgeleitet, wie oben angegeben. Beide Gleichungen haben die Wurzel $a + b$ gemeinsam. Soll die neue Gleichung, welche links die Differenzen der Gröfsen hat, die Lösung (6) mit der Gleichung 243_5 gemeinsam haben, so mufs man setzen

20. $$\frac{(x - a + b)^2 - b^2}{a^2 - (x + a - b)^2} = \left(\frac{x - a}{x - b}\right)^2$$

L. $x = a,\ b,\ \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Diese Gleichung ist jedoch vom vierten Grade, während die oben vorgeführten nur vom dritten Grade sind.

Benutzt man in (7) den vierten Quotienten statt des dritten, so erhält man die Gleichung 243_7. Aus dieser ist dann die Gleichung 243_8 formirt.

Zur Formation von 243_9 sind die 1., 2. und 4. Darstellung von t bei (6) in V., zur Formation von 243_{10} die 1., 2. und 3. Darstellung benutzt. Man kann auch 243_{10} aus 243_9 hinschreiben. Man entlehnt nur die Ausdrücke links; die rechte Seite der Gleichung ergiebt sich dann nach den oben gemachten Bemerkungen von selbst.

Die Gleichungen 243_{13} und 243_{14} sind aus den Darstellungen von t bei (8) in V. abgeleitet.

Zur Bildung der Gleichung 243_{11} mufs man von der Lösung

$$x = \sqrt{ab}$$

ausgehen. Diese giebt zunächst

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Hieraus durch korr. Add. und nach dem KS.

$$\frac{a - 2x}{2a - x} = \frac{x - 2b}{2x - b} = \frac{a + 2b - 3x}{b + 2a - 3x} \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen gleichen Quotienten sind die Gleichungen 243_{11} und 243_{12} hinzuschreiben.

Gleichungen von der aufgestellten Form, in welchen links die Differenzen stehen, wie in 243_6, 243_8 u. s. w., lassen sich auch leicht aus den Gleichungen ableiten, die in XX. behandelt sind, welche die Form

$$(8) \quad \left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}$$

haben. Statt eines Produkts kann man immer die Differenz der Quadrate der halben Summe und der halben Differenz setzen. So ist

$$CE = \left(\frac{C + E}{2}\right)^2 - \left(\frac{C - E}{2}\right)^2.$$

Daher kann man aus (8) mit Vertauschung der Seiten hinschreiben

$$\frac{(C + E)^2 - (C - E)^2}{(D + F)^2 - (D - F)^2} = \left(\frac{A}{B}\right)^2.$$

Hiernach hat man aus den vorn in XX. angeführten Gleichungen 243—243_2 die folgenden:

21. $\frac{(a + 2b - 3x)^2 - (x - a + 2b)^2}{(b + 2a - 3x)^2 - (x - b + 2a)^2} = \left(\frac{a + 2b - 3x}{b + 2a - 3x}\right)^2$

L. $x = \frac{2}{3}(a + b), \sqrt{ab}$.

22. $\frac{9(2a + b - x)^2 - (b - x)^2}{9(b + x)^2 - (b - x)^2} = \left(\frac{2a + b - x}{b + x}\right)^2$

L. $x = a, b, b$.

23. $\frac{(2a + 7b - 2x)^2 - 9b^2}{(2a + 5x)^2 - 9x^2} = \left(\frac{a + 3b - x}{a + 2x}\right)^2$

L. $x = a, b, \frac{a(a + b)}{a + 4b}$.

Umgekehrt kann man aus Gleichungen von der Form 243_6, 243_8 u. s. w. Gleichungen von der Form (8) bilden, wie sie in XX. vorkommen, indem man statt der Differenzen der Quadrate Produkte setzt und die Seiten der Gleichung vertauscht. Die aus den gerade hier in XXI. vorhandenen

Gleichungen auf die angegebene Weise gebildeten neuen Gleichungen haben jedoch wenig Interesse, da auf beiden Seiten der Gleichung gleiche Faktoren erscheinen.

Man kann die hier behandelte Form der Gleichungen auch noch verallgemeinern. Hat man die Quotientengleichung

$$(9) \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

so folgt aus derselben nach dem KS. ganz allgemein

24. $\frac{pA^2 + qC^2}{pB^2 + qD^2} = \left(\frac{Am + Cn}{Bm + Dn}\right)^2$

L. 1) $AD = BC$

2) $2mn(ABp - CDq) = (qm^2 - p^2)(AD + BC)$.

Die Gleichung 24 ist daher immer quadratisch lösbar, wenn A, B, C und D lineare Ausdrücke von x sind. Zwei Wurzeln der Gleichung sind dann durch die Partialgleichung 1) oder (9) gegeben. Diese hat man in seinem Belieben, da man die Gleichung (9) beliebig wählen kann. Die beiden andern Wurzeln sind durch die Gleichung 2) bestimmt. Sind A, B, C, D gegeben, so kann man m, n, p, q so bestimmen, daſs diese beiden Wurzeln rational werden; doch ist das immer sehr umständlich. Viel einfacher und zugleich viel interessanter ist es, die Gleichung 24 kubisch zu machen, dann hat die Partialgleichung 2) nur noch eine Wurzel und diese muſs immer rational sein, wie man die willkürlichen Koefficienten m, n, p und q auch annimmt.

Ist z. B. als Lösung

$$1) \quad x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

gegeben, so hat man zunächst die Quotientengleichung

$$(10) \quad \frac{x + a - b}{b} = \frac{a}{x - a + b},$$

und daher für 24 die allgemeine Gleichung

$$\frac{p(x + a - b)^2 + qa^2}{q(x - a + b)^2 + pb^2} = \left(\frac{m(x + a - b) + na}{n(x - a + b) + mb}\right)^2.$$

Soll die Gleichung kubisch werden, so muſs

$$\frac{p}{q} = \frac{m^2}{n^2}$$

werden. Setzt man $p = m^2$, $q = n^2$, so hat man

25. $\frac{m^2(x + a - b)^2 + n^2a^2}{n^2(x - a + b)^2 + m^2b^2} = \left(\frac{m(x + a - b) + na}{n(x - a + b) + mb}\right)^2$

L. $x = \frac{an^2 + bm^2}{an^2 - bm^2}(a - b)$, $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Setzt man $m = 3$, $n = 2$, so erhält man

26. $\frac{9(x + a - b)^2 + 4a^2}{4(x - a + b)^2 + 9b^2} = \left(\frac{3x + 5a - 3b}{2x + 5b - 2a}\right)^2$

L. $x = \frac{4a + 9b}{4a - 9b}(a - b)$, $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Nimmt man statt der Gleichung (9) eine der Gleichungen 18—28, welche in IV. behandelt sind, so ist auch hier die Aufstellung allgemeiner und specieller Gleichungen von der hier verlangten Form nach dem angegebenen Verfahren sehr einfach; man gelangt jedoch meistens zu grofsen Zahlen, unförmlichen Gleichungen und unförmlichen Resultaten.

XXII. $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{C}{D}$.

244. $\left(\frac{x - b}{x - a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2x + 2a - b}{2x + 2b - a}$

L. $x = \frac{2a^2 + 3ab + 2b^2}{2(a + b)}$, $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

244_1. $\left(\frac{5a - b + x}{5b - a + x}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x + a + 7b}{x + b + 7a}$

L. $x = \frac{a^2 - 16ab + b^2}{a + b}$, $\sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$.

244_2. $\left(\frac{5a + b - x}{5b + a - x}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 17b + x}{b + 17a + x}$

L. $x = \frac{a^2 - 6ab + b^2}{a + b}$, $\sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

244_3. $\left(\frac{7a - b + x}{7b - a + x}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{a + 17b + x}{b + 17a + x}$

L. $x = \frac{a^2 - 30ab + b^2}{a + b}$, $\sqrt{a^2 + 34ab + b^2}$.

244_4. $\left(\frac{a-b+x}{a+3b-x}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 \cdot \frac{2x+4a+4b}{x-a+b}$

L. $x = \frac{a^3+5a^2b+19ab^2+7b^3}{a^2+6ab+b^2}$, $\sqrt{5a^2+6ab+5b^2}$.

244_5. $\left(\frac{2a+b-3x}{2b+a-3x}\right)^2 = \left(\frac{4a-b}{4b-a}\right)^2 \cdot \frac{a+4b+4x}{b+4a+4x}$

L. $x = \frac{76a^2+127ab+76b^2}{180(a+b)}$, $\sqrt{ab}$.

Auch diese Gleichungen sind leicht aus den Darstellungen von t zu bilden, welche zu symmetrischen Gleichungen des vierten Grades gehören. Für den konstanten Faktor $\frac{a}{b}$ sind die in V. aufgestellten Gleichungen zu benutzen, für andere konstante Faktoren die in VI. aufgestellten. Setzt man das Quadrat der 3. Darstellung von t bei (6) in V. gleich dem Produkt aus der 9. und 10. Darstellung, oder die 3. Darstellung gleich der 13. Darstellung, so erhält man die Gleichung 244_2. Setzt man die 4. Darstellung gleich der 13. Darstellung, so erhält man die Gleichung 244_3.

Ebenso ergeben sich aus den Darstellungen von t bei (8) in V. die Gleichungen:

1. $\left(\frac{a-3b+x}{b-3a+x}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{9a-7b+3x}{9b-7a+3x}$

L. $x = \frac{9a^2+10ab+9b^2}{3(a+b)}$, $\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

2. $\left(\frac{5a-3b+x}{5b-3a+x}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{9a-7b+3x}{9b-7a+3x}$

L. $x = \frac{9a^2-14ab+9b^2}{3(a+b)}$, $\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

In derselben Weise hat man aus den Darstellungen von t bei (17) in V:

3. $\left(\frac{13a-3b+x}{13b-3a+x}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{9a+41b+3x}{9b+41a+3x}$

L. $x = \frac{9a^2-110ab+9b^2}{3(a+b)}$, $\sqrt{9a^2+82ab+9b^2}$.

4. $\left(\frac{7a+3b-x}{7b+3a-x}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{9a+41b+3x}{9b+41a+3x}$

L. $x = \frac{9a^2+10ab+9b^2}{3(a+b)}$, $\sqrt{9a^2+82ab+9b^2}$.

Dafs man solche Gleichungen auch direkt aus den zur Lösung gehörigen Quotientengleichungen formiren kann, ist einleuchtend. So hat man für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

die Quotientengleichung

$$(1) \quad \frac{x + a - b}{b} = \frac{a}{x - a + b} = \frac{x - b}{a - x} \; (= X).$$

Dann hat man weiter, indem man aus den beiden ersten Quotienten den Faktor $\frac{a}{b}$ aussondert, aus den noch bleibenden Quotienten nach Vg. mit Hülfe des KS. zwei neue gleichwertige Quotienten bildet, bei welchen der Nenner des einen gleich dem Zähler des andern ist,

$$X = \frac{a}{b} \left| \frac{x + a - b}{a} = \frac{b}{x - a + b} \right|, \text{ also}$$

$$(2) \quad X = \frac{a}{b} \cdot \frac{2x + 2a - b}{x + a + b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a + b}{2x + 2b - a}.$$

Bildet man daher X^2 aus (1) und (2) in geeigneter Weise, so erhält man

$$\left(\frac{x - b}{x - a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{2x + 2a - b}{2x + 2b - a},$$

d. h. die Gleichung 244.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}$$

hat man

$$(3) \quad \frac{x + a - b}{4b} = \frac{4a}{x - a + b} = \frac{5a - b + x}{5b - a + x} \; (= X),$$

und weiter wie bei der vorigen Lösung

$$X = \frac{a}{b} \left| \frac{x + a - b}{4a} = \frac{4b}{x - a + b} \right|, \text{ also}$$

$$(4) \quad X = \frac{a}{b} \cdot \frac{x + a + 7b}{2(x + a + b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2(x + a + b)}{x + b + 7a}.$$

Bildet man X^2 aus (3) und (4) in geeigneter Weise, so erhält man die Gleichung 244_1.

Bei Gleichungen von der Form 244_4 und 244_5 mufs man die Entwickelungen in VI. benutzen. So hat man für die Lösung

$$x = \sqrt{5a^2 + 6ab + 5b^2}$$

nach (14) in VI. mit Vertauschung von a und b zunächst

$$(5)\quad \frac{3a+b+x}{2(a-b)} = \frac{2(a+b)}{3a+b-x} = \frac{a-b+x}{x-a-3b}\ (=X).$$

Hieraus weiter nach dem wiederholt angewendeten Verfahren

$$X = \frac{a+b}{a-b}\left|\frac{3a+b+x}{2(a+b)} = \frac{2(a-b)}{3a+b-x}\right|, \text{ also}$$

$$(6)\quad X = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{3b+a+x}{b-a+x} = \frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{4a+4b+2x}{a+3b+x}.$$

Bildet man X^2 aus (5) und (6) in geeigneter Weise, so erhält man 244_4.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{ab}$$

hat man nach VIf.:

$$(7)\quad \frac{3x+2a-2b}{4b-a} = \frac{4a-b}{3x-2a+2b} = \frac{2a+b-3x}{3x-a-2b}$$

$$= \frac{4a-b}{4b-a}\left|\frac{3x+2a-2b}{4a-b} = \frac{4b-a}{3x-2a+2b}\right|$$

$$(8)\quad = \frac{4a-b}{4b-a}\cdot\frac{4x+a+4b}{5x+2a+2b} = \frac{4a-b}{4b-a}\cdot\frac{5x+2a+2b}{4x+4a+b}.$$

Aus (7) und (8) ist die Gleichung 244_5 hinzuschreiben.

Bei der Aufstellung der drei letzten Gleichungen war es umständlich, nach Vg. mit Hülfe des KS. aus zwei gleichen Quotienten zwei neue gleichwertige Quotienten zu bilden, bei denen der Nenner des einen gleich dem Zähler des andern war. Sind für eine symmetrische Gleichung des vierten Grades, welche auf ein r führt, das mit der Lösung identisch ist, die Darstellungen von t gegeben, so hat man die Umformung der Quotienten nicht nötig; die gesuchte Gleichung ergiebt sich dann von selbst, wie es oben gezeigt ist.

XXIII. $\frac{A^2 \pm B^2}{C^2 \pm D^2} = \left(\frac{E}{F}\right)^2$, biquadratisch.

361. $\frac{(a-2x)^2-(x-2b)^2}{(a+2x)^2-(x+2b)^2} = \left(\frac{a+2b-3x}{a-2b+x}\right)^2$

L. $x = 2b-a,\ \frac{a+2b}{3},\ \sqrt{ab}.$

361_1. $\frac{(a-2x)^2+(x-2b)^2}{(a+2x)^2+(x+2b)^2} = \left(\frac{x-a+2b}{3x+a+2b}\right)^2$

L. $x = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2+4b^2)},\ \sqrt{ab}.$

361_2. $\frac{(x+a-b)^2-b^2}{a^2-(x-a+b)^2} = \left(\frac{x+a-2b}{x+b-2a}\right)^2$

L. $x = 2a-b,\ 2b-a,\ \sqrt{a^2-ab+b^2}.$

361_3. $\frac{(a+b-x)^2-a^2}{4b^2-(a+b+x)^2} = \left(\frac{2a+b-x}{a+3b+x}\right)^2$

L. $x = 2a+b,\ -(a+3b),\ \sqrt{a^2+b^2}.$

Diese Gleichungen sind von derselben Form wie die Gleichungen in XXI., nur sind die dort vorgeführten vom dritten Grade, diese vom vierten Grade. Bei jenen Gleichungen hob sich x^4 fort, bei diesen nicht. Die Aufstellung dieser Gleichungen ist daher, weil keine besondere Bedingung zu erfüllen ist, noch einfacher als die der Gleichungen in XXI. Man bildet am einfachsten zu einer gegebenen Lösung die betreffenden Quotientengleichungen und schreibt, wie es in XXI. angegeben ist, die zugehörige Gleichung nach dem KS. hin.

Soll z. B. die Lösung

$$x = \sqrt{ab}$$

sein, so hat man

$$(1)\quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b} = \frac{a-x}{x-b}.$$

Daher nach dem KS., wenn man quadrirt,

1. $\frac{a^2-x^2}{x^2-b^2} = \left(\frac{a-x}{b-x}\right)^2$

L. $x = a,\ b,\ \sqrt{ab}.$

2. $\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2} = \left(\frac{a-x}{b-x}\right)^2$

L. $x = 0,\ \sqrt{ab}.$

Die letzte Gleichung ist kubisch. — Man kann aus (1) auch allgemeiner bilden

3. $\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2} = \left(\frac{ap+qx}{bq+px}\right)^2.$

Noch allgemeiner

4. $\frac{(a+mx)^2+(an+x)^2}{(b+nx)^2+(bm+x)^2} = \left(\frac{ap+qx}{bq+px}\right)^2.$

Die beiden Gleichungen sind vom vierten Grade. Zwei Wurzeln sind durch die Lösung gegeben. Scheidet man diese beiden Wurzeln aus, so bleibt noch eine vollständige quadratische Gleichung, welche zwei irrationale Wurzeln liefert. Für die Gleichung 3 ist noch zu lösen

$$(p^2-q^2)(x^2+ab) = 2(a-b)pqx.$$

Für die Gleichung 4 ist noch zu lösen

$$p^2(m^2+1)(x^2+ab)+2ap^2(m+n)x+2bpq(m^2+1)x = \\ q^2(n^2+1)(x^2+ab)+2bq^2(m+n)x+2apq(n^2+1)x.$$

Die aus der Quotientengleichung (1) hervorgehenden Gleichungen sind nur von geringem Interesse, weil im Zähler nur a, im Nenner nur b vorkommt. Man mufs, bevor man den KS. zur Bildung von Quotienten benutzt, um aus diesen Quotienten Gleichungen von der hier verlangten Form abzuleiten, auf die Gleichung (1) korr. Add. anwenden. Man erhält dadurch leicht

$$(2) \quad \frac{a-2x}{a+2x} = \frac{x-2b}{x+2b} = \frac{a+2b-3x}{a-2b+x} = \frac{a-2b-x}{a+2b+3x} \text{ u. s. w.}$$

Die beiden ersten Quotienten sind aus (1) durch korr. Add. abgeleitet, die beiden letzten Quotienten aus den beiden ersten nach dem KS.

Zur Formation der Gleichung 361 sind die ersten drei Quotienten benutzt, zur Formation der Gleichung 361_1 die ersten beiden und der dritte. Man hätte auch ebenso gut setzen können:

5. $\frac{(a-2x)^2+(x-2b)^2}{(a+2x)^2+(x+2b)^2} = \left(\frac{a+2b-3x}{a-2b+x}\right)^2$

L. $x = \sqrt{\tfrac{1}{5}(a^2+4b^2)},\ \sqrt{ab}.$

6. $\frac{(a-2x)^2-(x-2b)^2}{(a+2x)^2+(x+2b)^2} = \left(\frac{x-a+2b}{3x+a+2b}\right)^2$

L. $x = 2b-a,\ -\tfrac{1}{3}(a+2b),\ \sqrt{ab}.$

Aus (1) kann man durch korr. Add. und nach dem KS. auch bilden:

$$\frac{a + 2x}{2a + x} = \frac{x + 2b}{2x + b} = \frac{a - 2b + x}{2a - b - x}.$$

Dann hat man

7. $\frac{(a + 2x)^2 - (x + 2b)^2}{(x + 2a)^2 - (b + 2x)^2} = \left(\frac{x + a - 2b}{x + b - 2a}\right)^2$

L. $x = 2b - a,\ 2a - b,\ \sqrt{ab}.$

8. $\frac{(a + 2x)^2 + (x + 2b)^2}{(x + 2a)^2 + (b + 2x)^2} = \left(\frac{x + a - 2b}{x + b - 2a}\right)^2$

L. $x = -\frac{2}{5}(a + b),\ \sqrt{ab}.$

Die letzte Gleichung ist kubisch, gehört also genau genommen nicht hierher.

Man kann aus (1) auch allgemein bilden:

$$\frac{a - nx}{an - x} = \frac{x - bn}{nx - b} = \frac{a + bn - (n + 1)x}{b + an - (n + 1)x}.$$

Dann hat man

9. $\frac{(a - nx)^2 - (x - bn)^2}{(an - x)^2 - (nx - b)^2} = \left(\frac{a + bn - (n + 1)x}{b + an - (n + 1)x}\right)^2$

L. $x = \frac{a + bn}{n + 1},\ \frac{b + an}{n + 1},\ \sqrt{ab}.$

10. $\frac{(a - nx)^2 + (x - bn)^2}{(an - x)^2 + (nx - b)^2} = \left(\frac{a + bn - (n + 1)x}{b + an - (n + 1)x}\right)^2$

L. $x = \frac{(a + b)n}{n^2 + 1},\ \sqrt{ab}.$

Die letzte Gleichung ist kubisch.

Man kann in der Verallgemeinerung noch weiter gehen, ohne die Auflösung wesentlich zu erschweren. Man kann aus (1) auch bilden:

$$\frac{am - nx}{ap - qx} = \frac{mx - bn}{px - bq} = \frac{am + bn - (m + n)x}{ap + bq - (p + q)x}.$$

Dann hat man:

11. $\frac{(am - nx)^2 - (mx - bn)^2}{(ap - qx)^2 - (px - bq)^2} = \left(\frac{am + bn - (m + n)x}{ap + bq - (p + q)x}\right)^2$

L. $x = \frac{am + bn}{m + n},\ \frac{ap + bq}{p + q},\ \sqrt{ab}.$

12. $$\frac{(am - nx)^2 + (mx - bn)^2}{(ap - qx)^2 + (px - bq)^2} = \left(\frac{am + bn - (m + n)x}{ap + bq - (p + q)x}\right)^2.$$

Zwei Wurzeln dieser Gleichung sind durch die Lösung gegeben, von der wir ausgegangen sind. Die beiden andern sind irrational. Man erhält für diese

$$x = \frac{(a - b)(mq + np) + \sqrt{(a - b)^2(mq - np)^2 + 4(amp - bnq)^2}}{2(nq - mp)}.$$

Die beiden letzten Wurzeln werden scheinbar rational, wenn man $mq = np$ setzt. Dann hat aber die Gleichung keinen Sinn; sie wird identisch. Die Wurzeln werden auch rational, wenn man $mp = nq$ setzt. Dann wird jedoch eine Wurzel $= \infty$, oder die Gleichung ist nicht mehr vom 4. Grade. Setzt man z. B. $p = n$, $q = m$, so erhält man

13. $$\frac{(am - nx)^2 + (mx - bn)^2}{(an - mx)^2 + (nx - bm)^2} = \left(\frac{am + bn - (m + n)x}{an + bm - (m + n)x}\right)^2$$

L. $x = \frac{(a + b)mn}{m^2 + n^2}$, $\sqrt{ab}$.

Setzt man $a = 9$, $b = 4$, $m = a$, $n = b$, so giebt das

14. $$\frac{(9a - bx)^2 + (ax - 4b)^2}{(9b - ax)^2 + (bx - 4a)^2} = \left(\frac{9a + 4b - (a + b)x}{9b + 4a - (a + b)x}\right)^2$$

L. $x = \frac{13ab}{a^2 + b^2}$, ± 6.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

hat man die Quotientengleichung

$$\frac{x + a - b}{a} = \frac{b}{x - a + b} = \frac{a - 2b + x}{2a - b - x}.$$

Hieraus ergiebt sich nach dem oft angewendeten Verfahren die Gleichung 361_2.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

hat man

$$\frac{a + b - x}{2b} = \frac{a}{a + b + x} = \frac{2a + b - x}{a + 3b + x} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung 361_3.

Auch auf vollständige quadratische Gleichungen läfst sich dies Verfahren leicht anwenden. Man hat z. B. für die vollständige quadratische Gleichung

$$x^2 - (a+b)x\,(a+b)x + ab = 0,$$

deren Wurzeln

$$x_1 = a, \quad x_2 = b$$

sind, die Quotientengleichung

$$\frac{a+b-x}{b} = \frac{a}{x}$$

und daher durch korr. Add. und nach dem KS.

$$\frac{a-b-x}{a-3b-x} = \frac{a-2x}{a-4x} = \frac{2a-b-3x}{2a-3b-5x} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt:

15. $\frac{(x-a+b)^2 + (2x-a)^2}{(x-a+3b)^2 + (4x-a)^2} = \left(\frac{3x-2a+b}{5x-2a+3b}\right)^2$

L. $x = a,\ b,\ \frac{4a-3b}{7}$.

16. $\frac{(x-a+b)^2 - (2x-a)^2}{(x-a+3b)^2 - (4x-a)^2} = \left(\frac{3x-2a+b}{5x-2a+3b}\right)^2$

L. $x = a,\ b,\ \frac{2a-b}{3},\ \frac{2a-3b}{5}$.

XXIV. $\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{C}+\sqrt{D}} = \sqrt{\frac{E}{F}}$, kubisch und biquadratisch.

362. $\frac{\sqrt{3a+x}+\sqrt{3x+a}}{\sqrt{3b+x}+\sqrt{3x+b}} = \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}$

L. $x = 0,\ \sqrt{ab}$.

362_1. $\frac{\sqrt{3a+x}+\sqrt{3x+a}}{\sqrt{3b+x}+\sqrt{3x+b}} = \sqrt{\frac{a-x}{b-x}}$

L. $x = 0,\ a,\ b$.

362_2. $\frac{\sqrt{3a+x}-\sqrt{3x+a}}{\sqrt{3b+x}-\sqrt{3x+b}} = \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}$

L. wie in 362.

362₃. $\frac{\sqrt{x-a+b}-\sqrt{2a}}{\sqrt{x-a-b}-\sqrt{2b}}=\sqrt{\frac{x+3a+b}{x-a+b}}$

L. $x=\frac{(a+b)^2}{a-b}$, $\sqrt{a^2+6ab+b^2}$.

362₄. $\frac{\sqrt{x+a+b}+\sqrt{b}}{\sqrt{x+a-b}+\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$

L. $x=a+b$, a, b.

362₅. $\frac{\sqrt{x-a+b}+\sqrt{b}}{\sqrt{x+a-b}+\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x-a+2b}{x-b+2a}}$

L. $x=a+b$, $\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

362₆. $\frac{\sqrt{a+b+x}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b-x}+\sqrt{2b}}=\sqrt{\frac{2a+b+x}{3b+a-x}}$

L. $x=\frac{(a+b)(a-2b)}{a+2b}$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

362₇. $\frac{\sqrt{a+5b+x}+\sqrt{6b}}{\sqrt{a+5b-x}+\sqrt{6b}}=\sqrt{\frac{a+11b+x}{a+11b-x}}$

L. $x=0$, $\sqrt{(a-b)(a+11b)}$.

362₈. $\frac{\sqrt{a-2x}+\sqrt{2b-x}}{\sqrt{b-2x}+\sqrt{2a-x}}=\sqrt{\frac{a+2b-3x}{b+2a-3x}}$

L. $x=\frac{2}{5}(a+b)$, $\sqrt{ab}$.

362₉. $\frac{\sqrt{a-2x}+\sqrt{2b-x}}{\sqrt{b-2x}+\sqrt{2a-x}}=\sqrt{\frac{x-a+2b}{x-b+2a}}$

L. $x=\frac{2}{5}(a+b)$, $a-2b$, $b-2a$.

362₁₀. $\frac{\sqrt{7a-9b+3x}+\sqrt{3a+3b-x}}{\sqrt{7b-9a+3x}+\sqrt{3a+3b-x}}=\sqrt{\frac{5a-3b+x}{5b-3a+x}}$

L. $x=3(a+b)$, $\sqrt{9a^2-14ab+9b^2}$.

362₁₁. $\frac{\sqrt{7a-9b+3x}-\sqrt{3a+3b-x}}{\sqrt{7b-9a+3x}-\sqrt{3a+3b-x}}=\sqrt{\frac{x+a-3b}{x+b-3a}}$

L. $x=3(a+b)$, $3a-b$, $3b-a$.

362₁₂. $\frac{\sqrt{2a+x}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{2a-x}+\sqrt{2(a-b)}}=\sqrt{\frac{x+a-b}{x-2b}}$

L. $x=b-a$, $2b$, $\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

$362_{13}.\ \frac{\sqrt{x+a+b}+\sqrt{2a}}{\sqrt{x-a-b}+\sqrt{2b}}=\sqrt{\frac{b-a+x}{3b+a-x}}$

L. $x=a-b,\ a+3b,\ \sqrt{a^2+6ab+b^2}$.

Gleichungen der vorstehenden Art lassen sich, wie die in den beiden vorhergehenden Abschnitten vorkommenden Gleichungen, aus den Darstellungen von t, welche zu symmetrischen Gleichungen des 4. Grades gehören, oder einfacher direkt aus Quotientengleichungen ableiten, welche aus der durch die Lösung gegebenen Gleichung gebildet sind.

So folgt aus den Darstellungen von t bei (11) in I. nach dem KS., indem man x statt r setzt,

1. $\frac{\sqrt{4x+5b}+\sqrt{4a+3b}}{\sqrt{4x-5b}+\sqrt{4a-3b}}=\sqrt{\frac{a+2b+x}{a-2b+x}}$

L. $x=\frac{5}{4}a,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

Die Gleichung ist kubisch, weil sich, wie man leicht erkennt, die höchste Potenz von x fortheben mufs. — Setzt man links die Differenzen der Wurzeln statt der Summen, so ändert sich die Lösung nicht, obgleich es nach (11) in I. dann eigentlich

$$\sqrt{4a-3b}-\sqrt{4x-5b}\ \text{statt}\ \sqrt{4x-5b}-\sqrt{4a-3b}$$

heifsen sollte. Dies macht jedoch keinen Unterschied, da die Wurzel rechts in der Gleichung 1 auch negativ sein kann.

Zur Formirung der Gleichung sind die 1., 3. und 4. Darstellung bei (11) in I. benutzt. Benutzt man die 2. Darstellung statt der 1. Darstellung, so mufs die Gleichung vom 4. Grade werden, es kann sich x^4 nicht fortheben. Man erhält

2. $\frac{\sqrt{4x+5b}+\sqrt{4a+3b}}{\sqrt{4x-5b}+\sqrt{4a-3b}}=\sqrt{\frac{b-2a+2x}{b+2a-2x}}$

L. $x=\frac{2a\pm b}{2},\ \sqrt{a^2+b^2}$.

In allen oben vorgeführten und in den hier aufgestellten Gleichungen stehen rechts im Radikanden die Summen oder Differenzen der links stehenden Radikanden, genau oder bis auf einen gleichen Faktor, der sich forthebt. So hat man für die Gleichung 1:

$$(4x+5b)+(4a+3b)=4(a+2b+x)$$
$$(4x-5b)+(4a-3b)=4(a-2b+x).$$

Für die Gleichung 2 hat man ebenso:

$$(4x+5b)-(4a+3b)=2(b-2a+2x)$$
$$(4a-3b)-(4x-5b)=2(2a+b-2x).$$

Geht man daher von der Quotientengleichung

$$(1)\quad \frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

aus, so haben die oben stehenden Gleichungen die Form

$$\text{I. } \frac{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}{\sqrt{C}\pm\sqrt{D}}=\sqrt{\frac{A+B}{C+D}}$$

$$\text{L. 1) } \frac{A}{B}=\frac{C}{D},\quad 2)\ \frac{A}{B}=\frac{D}{C}.$$

Oder sie haben die Form

$$\text{II. } \frac{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}{\sqrt{C}\pm\sqrt{D}}=\sqrt{\frac{A-B}{C-D}}$$

$$\text{L. 1) } A=B,\ 2)\ C=D,\ 3)\ \frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

Hätte man rechts im Radikanden $D-C$ statt $C-D$, so hätte man folgende Partialgleichungen erhalten:

$$1)\ A=B,\ 2)\ C=D,\ 3)\ \frac{A}{B}=\frac{D}{C}.$$

Die Gleichungen I und II geben also immer Gleichungen, deren Auflösung einfach ist, da sie sich leicht zerlegen lassen. Ob sie kubisch oder biquadratisch werden, läfst sich aus den Partialgleichungen leicht ersehen.

Man kann aus (1) auch ganz allgemein bilden

$$\text{III. } \frac{m\sqrt{A}+n\sqrt{B}}{m\sqrt{C}+n\sqrt{D}}=\sqrt{\frac{Ap+Bq}{Cp+Dq}}.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist immer durch die Gleichung (1) gegeben. Im allgemeinen ist jedoch die Gleichung III vom 6. Grade. Scheidet man den Faktor $AD-BC$ aus, der wegen der Gleichung (1) in derselben enthalten sein mufs, so bleibt immer noch eine Gleichung vom vierten Grade zu lösen übrig. Die in III enthaltenen speciellen Gleichungen werden daher für unsere Zwecke wenig Interesse darbieten.

Um speciell auf die Bildung der oben vorangestellten Gleichungen einzugehen, so hat man für die Lösung

$$x=\sqrt{ab}$$

zunächst die Quotientengleichung

$$(2) \quad \frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

und hieraus nach dem KS.

$$(3) \quad \frac{a+x}{x+b}=\frac{3a+x}{3x+b}=\frac{a+3x}{x+3b}=\frac{a-x}{x-b} \text{ u. s. w.}$$

Aus den drei ersten Quotienten lassen sich nach dem KS. sofort die Gleichungen 362 und 362_2 hinschreiben. Bei 362_2 sollte es im Nenner links eigentlich

$$\sqrt{3x+b}-\sqrt{3b+x}$$

heifsen; da jedoch das Zeichen der Quadratwurzel rechts auch negativ sein kann, so macht das, wie schon oben bemerkt, keinen Unterschied.

Mit Benutzung der drei letzten Quotienten in (3) erhält man

3. $$\frac{\sqrt{3a+x}+\sqrt{a+3x}}{\sqrt{3x+b}+\sqrt{x+3b}}=\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$$

L. $x=a,\ b,\ \sqrt{ab}.$

Die Gleichung ist vom 4. Grade, da sich die höchste Potenz von x nicht forthebt. Es ist nicht

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}+\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{-x}{x}}.$$

Die Gleichung 362_1 ist aus der Gleichung 362 abgeleitet. Die linke Seite ist geblieben; aber rechts stehen im Radikanden statt der Summen die Differenzen der Radikanden links. Die Gleichungen 362 und 362_1 haben nur die Wurzel 0 gemeinsam. Die Gleichung 362_1 läfst sich nicht aus den

Quotientengleichungen (2) und (3) ableiten. Auch läſst sie sich nicht wohl ableiten aus Quotientengleichungen, welche aus der quadratischen Gleichung

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

formirt sind, obgleich diese die Wurzeln a und b mit derselben gemeinsam hat. Man muſs hier, wenn man überhaupt eine Quotientengleichung zum Grunde legen will, von der Gleichung

$$(4)\quad \frac{a}{b}=\frac{x}{x}$$

ausgehen, welche durch Vertauschung der Nenner aus (2) entsteht. Der Gleichung (4) wird genügt durch $x=0$. Dann hat man nach dem KS.

$$(5)\quad \frac{3a+x}{3b+x}=\frac{a+3x}{b+3x}=\frac{a-x}{b-x}\,.$$

Hieraus ist die Gleichung 362_1 hinzuschreiben.

Aus der Gleichung (2) folgt durch korr. Add. und nach dem KS. auch

$$(6)\quad \frac{a-2x}{2a-x}=\frac{2b-x}{b-2x}=\frac{a+2b-3x}{b+2a-3x}\,.$$

Hieraus ist 362_8 hinzuschreiben.

Für die Lösung

$$x=\sqrt{a^2+6ab+b^2}$$

hat man

$$x^2=(a+b)^2+4ab$$

$$(7)\quad \frac{x+a+b}{2b}=\frac{2a}{x-a-b}=\frac{x+3a+b}{x-a+b}=\frac{b-a+x}{3b+a-x}\,.$$

Aus den drei ersten Quotienten ist 362_3, aus den beiden ersten und dem vierten 362_{13} hinzuschreiben.

Für die Lösung

$$x=\sqrt{a^2-ab+b^2}$$

hat man

$$(8)\quad \frac{x-a+b}{a}=\frac{b}{x+a-b}=\frac{x-a+2b}{x-b+2a}=\frac{x-a}{b-x}\,.$$

Aus den drei ersten Quotienten ist 362_5 hinzuschreiben. — Aus den beiden ersten und dem vierten erhält man

4. $$\frac{\sqrt{x-a+b}+\sqrt{b}}{\sqrt{x+a-b}+\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$$

L. $x=a,\ b,\ \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

Die Gleichung ist vom 4. Grade. — Die Gleichung 362_5 ist aus 362_4 gebildet, indem rechts als Radikanden die Differenzen der Radikanden links genommen sind; oder sie kann aus der Gleichung 4 abgeleitet werden, indem man links im Nenner die Summanden umgestellt denkt und dann die Differenzen der Radikanden bildet. — Die Gleichung 4 hat mit der Gleichung 362_4 die beiden Wurzeln a und b gemeinsam.

Aus der Lösung

$$x=\sqrt{a^2+b^2}$$

hat man

$$(9)\qquad \frac{a+b+x}{2b}=\frac{a}{a+b-x}=\frac{2a+b+x}{a+3b-x}.$$

Hieraus ist die Gleichung 362_6 hinzuschreiben.

Um die Gleichung 362_7 zu bilden, hat man

$$x^2=a^2+10ab-11b^2=(a+5b)^2-36b^2$$

$$(10)\qquad \frac{a+5b+x}{6b}=\frac{6b}{a+5b-x}=\frac{a+11b+x}{a+11b-x}\ \text{u. s. w.}$$

Die Gleichung 362_9 ist nicht direkt aus einer Quotientengleichung gebildet, sondern aus der Gleichung 362_8 nach dem schon mehrfach angewendeten Verfahren. Man hätte aus 362_8 auch bilden können

5. $$\frac{\sqrt{a-2x}+\sqrt{2b-x}}{\sqrt{2a-x}+\sqrt{b-2x}}=\sqrt{\frac{2b-a+x}{b-2a-x}}$$

L. $x=a-2b,\ b-2a,\ \sqrt{ab}$.

Diese Gleichung ist jedoch vom 4. Grade.

Die Gleichung 362_{10} ist direkt aus der 5., 6. und 4. Darstellung von t bei (8) in V. hingeschrieben. Dann ist 362_{11} aus 362_{10} nach dem wiederholt angewendeten Verfahren gebildet. Ob links die Summen oder die Differenzen der Quadratwurzeln stehen, hat auf die Lösung der Gleichung keinen Einfluſs.

Die Gleichung 362_{12} ist wahrscheinlich ebenfalls aus Darstellungen von t hingeschrieben, welche zu symmetrischen Gleichungen des 4. Grades gehören, läfst sich jedoch auch leicht direkt bilden. Man hat

$$x^2 = 2(a^2 + b^2) = 4a^2 - 2(a^2 - b^2)$$

$$4a^2 - x^2 = 2(a^2 - b^2), \text{ also}$$

$$(11) \quad \frac{2a + x}{2(a - b)} = \frac{a + b}{2a - x} = \frac{x + a - b}{x - 2b} \text{ u. s. w.}$$

Auch aus Quotientengleichungen, wie sie in IV. behandelt sind, lassen sich leicht Gleichungen von der hier verlangten Form ableiten. So kann man nach den oben bei (1) gemachten allgemeinen Bemerkungen über die Aufstellung der Gleichungen von der hier verlangten Form aus den vorn in IV. unter 18 und 23 aufgeführten Gleichungen sofort hinschreiben:

6. $$\frac{\sqrt{x + a + 2b} + \sqrt{b - 2a + 2x}}{\sqrt{x + a - 2b} + \sqrt{b + 2a - 2x}} = \sqrt{\frac{3b - a + 3x}{3a - b - x}}$$

L. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\frac{1}{5}(3a + \sqrt{25b^2 - 16a^2})$.

7. $$\frac{\sqrt{x + a + 2b} + \sqrt{b - 2a + 2x}}{\sqrt{x + a - 2b} + \sqrt{b + 2a - 2x}} = \sqrt{\frac{3a + b - x}{3x - a - 3b}}$$

L. $x = 3a + b$, $\frac{1}{3}(a + 3b)$, $\sqrt{a^2 + b^2}$.

8. $$\frac{\sqrt{3x + 3a - 2b} + \sqrt{x - a + 2b}}{\sqrt{3x - 3a + 2b} + \sqrt{x + a - 2b}} = \sqrt{\frac{2x + a}{2x - a}}$$

L. $x = 0$, $\sqrt{a(a - b)}$.

9. $$\frac{\sqrt{3x + 3a - 2b} + \sqrt{x - a + 2b}}{\sqrt{3x - 3a + 2b} + \sqrt{x + a - 2b}} = \sqrt{\frac{2a - 2b + x}{2a - 2b - x}}$$

L. $x = \pm 2(a - b)$, $\sqrt{a(a - b)}$.

10. $$\frac{\sqrt{3x + 3a - 2b} + \sqrt{x - a + 2b}}{\sqrt{3x - 3a + 2b} + \sqrt{x + a - 2b}} = \sqrt{\frac{x + 2a - 2b}{x - 2a + 2b}}$$

L. $x = 0$, $\pm 2(a - b)$.

Auch die in V. und VI. behandelten Gleichungen [29—32_{11}] können als einfache Quotientengleichungen angesehen und zur Formation von Gleichungen der hier verlangten Art benutzt werden. Sie sind immer quadratisch lösbar. Aber die Summen und Differenzen der Radikanden werden lang und daher wird das rechts stehende Glied und mit diesem die ganze Gleichung unförmlich.

XXV. $\frac{A^3+B^3}{C^3+D^3}=\left(\frac{E}{F}\right)^3$; $\frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{C}+\sqrt[3]{D}}=\sqrt[3]{\frac{E}{F}}$, fünften Grades.

363. $\frac{(x-a+b)^3-b^3}{(x+a-b)^3-a^3}=\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3$

L. $x=a,\ b,\ a+b,\ \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

363$_1$. $\frac{(a-2x)^3+(2a-x)^3}{(b-2x)^3+(2b-x)^3}=\left(\frac{a-x}{b-x}\right)^3$

L. $x=0,\ a,\ b,\ \sqrt{ab}$.

363$_2$. $\frac{(2x-a)^3-(2b-x)^3}{(2x-b)^3-(2a-x)^3}=\left(\frac{a+2b-3x}{b+2a-3x}\right)^3$

L. $x=\frac{a+2b}{3},\ \frac{2a+b}{3},\ \frac{2}{5}(a+b),\ \sqrt{ab}$.

363$_3$. $\frac{(4x-5a)^3+(4b-3a)^3}{(4x+5a)^3+(4b+3a)^3}=\left(\frac{x-2a+b}{x+2a+b}\right)^3$

L. $x=\frac{5}{3}b,\ 2a-b,\ -(2a+b,\ \sqrt{a^2+b^2}$.

363$_4$. $\frac{(2x+a-2b)^3-(a+b-x)^3}{(2x+b-2a)^3-(a+b-x)^3}=\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^3$

L. $x=a,\ b,\ a+b,\ \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

364. $\frac{\sqrt[3]{3a-x}-\sqrt[3]{3x-b}}{\sqrt[3]{3b-x}-\sqrt[3]{3x-a}}=\sqrt[3]{\frac{3a+b-4x}{3b+a-4x}}$

L. $x=\frac{3a+b}{4},\ \frac{a+3b}{4},\ \frac{3}{10}(a+b),\ \sqrt{ab}$.

364$_1$. $\frac{\sqrt[3]{2x+a-2b}-\sqrt[3]{a+b-x}}{\sqrt[3]{2x+b-2a}-\sqrt[3]{a+b-x}}=\sqrt[3]{\frac{x-b}{x-a}}$

L. $x=a,\ b,\ a+b,\ \sqrt{a^2-ab+b^2}$.

$$364_2.\quad \frac{\sqrt[3]{4x - 5a} + \sqrt[3]{4b - 3a}}{\sqrt[3]{4x + 5a} + \sqrt[3]{4b + 3a}} = \sqrt[3]{\frac{x - 2a + b}{x + 2a + b}}$$

L. $x = \frac{5}{3}b,\ 2a - b,\ -(2a + b),\ \sqrt{a^2 + b^2}$.

Alle hier vorgeführten Gleichungen sind vom 5. Grade. Sie würden vom 6. Grade sein, wenn sich die höchste Potenz von x nicht überall forthöbe. Aufzulösen würden die Gleichungen auch dann noch leicht sein, wenn sich x^6 nicht forthöbe. Aber man würde es nicht gut verhindern können, dafs zwei von den sechs Wurzeln, welche die Gleichungen dann hätten, die aus einer quadratischen Gleichung folgten, recht unzierlich wären. Hebt sich x^4 fort, so verwandelt sich die betreffende quadratische Gleichung in eine einfache, die dann nur eine rationale Wurzel haben kann.

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den in XXI., XXIII. und XXIV. behandelten Gleichungen fast nur dadurch, dafs Kuben statt der Quadrate und Kubikwurzeln statt der Quadratwurzeln stehen. Sie sind aus denselben Quotientengleichungen abgeleitet. Bei den in den früheren Abschnitten vorkommenden ähnlichen Gleichungen war es nicht notwendig, dafs die Gröfsen rechts, je nachdem links Summen oder Differenzen standen, entsprechend durch Addition und Subtraktion gebildet waren. Legt man die Quotientengleichung

$$(1)\quad \frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

zum Grunde, so ist nach den früheren Abschnitten daraus einerseits gebildet:

$$\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \left(\frac{A + B}{C + D}\right)^2 \qquad \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{C} + \sqrt{D}} = \sqrt{\frac{A + B}{C + D}}$$

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2} = \left(\frac{A - B}{C - D}\right)^2 \qquad \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{\sqrt{C} - \sqrt{D}} = \sqrt{\frac{A - B}{C - D}}.$$

Andrerseits auch:

$$\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} = \left(\frac{A - B}{C - D}\right)^2 \qquad \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{\sqrt{C} + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A - B}{C - D}}$$

$$\frac{A^2 - B^2}{C^2 - D^2} = \left(\frac{A + B}{C + D}\right)^2 \qquad \frac{\sqrt{A} - \sqrt{B}}{\sqrt{C} - \sqrt{D}} = \sqrt{\frac{A + B}{C + D}}.$$

XXV. $\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{C} + \sqrt[3]{D}} = \sqrt[3]{\frac{E}{F}}$, fünften Grades.

Bei den Kuben und Kubikwurzeln müssen die Zeichen links und rechts korrespondiren. Man kann aus (1) allgemein bilden:

I. $\frac{A^3 + B^3}{C^3 + D^3} = \left(\frac{A + B}{C + D}\right)^3$

L. 1) $A + B = 0$, 2) $C + D = 0$, 3) $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, 4) $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$.

II. $\frac{A^3 - B^3}{C^3 - D^3} = \left(\frac{A - B}{C - D}\right)^3$

L. 1) $A - B = 0$, 2) $C - D = 0$, 3) $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, 4) $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$.

III. $\frac{\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{C} + \sqrt[3]{D}} = \sqrt[3]{\frac{A + B}{C + D}}$

L. wie bei I.

IV. $\frac{\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{C} - \sqrt[3]{D}} = \sqrt[3]{\frac{A - B}{C - D}}$

L. wie bei II.

Die Gleichung 363 ist aus (8) in XXIV. hinzuschreiben, nur sind in den Nennern die Zeichen vertauscht.

Aus der Quotientengleichung

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

hat man

$$\frac{a - 2x}{x - 2b} = \frac{2a - x}{2x - b} = \frac{a - x}{x - b},$$

also auch

$$\frac{a - 2x}{2b - x} = \frac{2a - x}{b - 2x} = \frac{a - x}{b - x}.$$

Hieraus ist 363_1 hinzuschreiben.

Die Gleichung 363_2 ist aus (6) in XXIV. hinzuschreiben.

Aus den Darstellungen von t bei (11) in I. hat man, wenn man x statt r setzt, a und b vertauscht und die Quotienten umkehrt,

$$\frac{4x - 5a}{4b + 3a} = \frac{4b - 3a}{4x + 5a} = \frac{x - 2a + b}{x + 2a + b}.$$

$$\text{XXV.}\quad \frac{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}{\sqrt[3]{C}+\sqrt[3]{D}} = \sqrt[3]{\frac{E}{F}}\text{, fünften Grades.}$$

Hieraus sind die Gleichungen 363_3 und 364_2 direkt hinzuschreiben.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

hat man

$$\frac{x+a-b}{b} = \frac{a}{x-a+b}.$$

Daher nach dem KS. auch

$$\frac{2x+a-2b}{a+b-x} = \frac{a+b-x}{2x-2a+b} = \frac{x-b}{a-x}.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen 363_4 und 364_1.

Für die Lösung

$$x = \sqrt{ab}$$

hat man

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

und daher durch korr. Add. und nach dem KS. auch

$$\frac{3a-x}{3x-a} = \frac{3x-b}{3b-x} = \frac{3a+b-4x}{4x-a-3b}.$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung 364.

Druckfehler.

S. 54 Nr. 79 lies $-20x)^2$ statt $-20x)$
„ 88 Nr. 7 lies $-b-r$ statt $-b+r$
„ 94 lies **40.**, **41.**, **42.**, **43.** bezw. statt **41.**, **42.**, **43.**, **44.**
„ 97 Z. 1 lies 44 statt 43; Z. 19 lies 1) statt (1)
„ 141 Z. 4 l. Hieraus st. Hiermit; Z. 6 l. $b)n$ st. $bn)$; Nr. 25 l. $-5b+2x$
„ 176 Z. 10 v. u. l. konstanten Faktor st. Fall; Z. 5 v. u. fehlt (62_1)
„ 305 Z. 8 l. $2(A+B) = C+D$; Z. 12 l. rechts $\sqrt{\frac{C}{D}}$
„ 325 oben l. $+\sqrt{B}$ st. $-\sqrt{D}$; Z. 10 v. u. l. 318 st. 218
„ 350 Nr. 15 l. rechts $a+b$ st. $x+b$
„ 370 Z. 10 l. pn^2 st. p^2
„ 376 Nr. 6 l. $-(x$ st. $+(x$; $a-2b$ st. $2b-a$
„ 379 Z. 4 ist $(a+b)x$ einmal zu streichen
„ 380 Nr. 362_4 l. oben $-a$ st. $+a$.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Klempt, D. Aug., Realschullehrer in Rostock, Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra. Mit einigen hundert Beispielen. (XII u. 260 S.) gr. 8. 1880. geh. n. ℳ 4.—

Infolge der immer mehr hervortretenden Bedeutung der modernen Algebra für die mathematischen Disziplinen einerseits und des steten Wachstums derselben andererseits ist es für den Studierenden notwendig geworden, sich möglichst bald mit den wichtigsten Prinzipien jenes Zweiges der Mathematik vertraut zu machen, ja es ist sogar wünschenswert, dafs dem Studierenden bereits in den ersten Semestern Gelegenheit geboten werde, die Hauptsätze und die vorzüglichsten Denkoperationen der modernen Algebra kennen zu lernen, um dann mit besserem Verständnis an die übrigen Disziplinen zu gehen.

Nun sind freilich die Lehren der neuern Algebra teils in den Vorlesungen von Salmon, teils in den Elementen der neueren Geometrie von Fiedler, teils in der Theorie der binären Formen von Clebsch, teils in der Théorie des formes binaires von Bruno in eleganter und meisterhafter Art dargestellt, aber es steht wohl erfahrungmäfsig fest, dafs diese Lehrbücher nicht geeignet sind, den Anfänger, der eben die Schule verlassen hat, einzuführen, weil sie Kenntnisse voraussetzen, die diese nicht besitzen, weil sie sich in Denkoperationen bewegen, worin diese nicht geübt sind.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt nun, diesem Mangel abzuhelfen Sie ist so gehalten, dafs sie von jedem begabteren Primaner, um so mehr von jedem Studenten verstanden werden kann, indem dieselbe aus der Algebra nur die Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer Unbekannten, aus der Trigonometrie die goniometrischen Grundformeln als bekannt voraussetzt und so viel Übung im Rechnen mit Buchstabengröfsen verlangt, als man wohl allgemein findet. Mit dieser Grundlage soll der Leser in die schönen Untersuchungen der genialen Schöpfer eingeführt werden. Dem entsprechend haben wir die vorliegende Schrift nicht als Handbuch, nicht als Grundzüge, sondern als ein Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra bezeichnet; und dem entsprechend hatten wir stets zwei Punkte im Auge, erstens den Leser mit den Hauptproblemen bekannt zu machen oder ihn an dieselben heranzuführen, und zweitens, dem Studierendzn hinlängliche Übung in den ihm fremden Denkoperationen zu bieten. Aus dem letzten Grunde gaben wir für manche Sätze mehrere Beweise und fügten einige 100 Aufgaben hinzu. Bei der Auswahl dieser Beispiele waren wir bestrebt, solches Übungsmaterial herbeizuschaffen, welches für manche andre Disziplinen, z. B. die Geometrie, von Bedeutung ist. Hierdurch werden viele Formeln und Ausdrücke alte Bekannte des Studierenden, hierdurch gewöhnt er sich daran, Probleme von verschiedenen Gesichtspunkten aus anzugreifen.

Matthiessen, Dr. Ludwig, ord. Professor der Physik an der Universität zu Rostock, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. (XVI u. 1001 S.) gr. 8. 1878. geh. n. ℳ 20.—

Dieses Werk kann in mehrfacher Beziehung als eine Neubearbeitung und vollständige Ausgabe der im Jahre 1866 in demselben Verlage erschienenen kleinen Schrift: „Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen" angesehen werden. Dasselbe liefert in seinem jetzigen Umfange einen vollständigen Abrifs der Theorie und Geschichte der algebraischen Gleichungen, speziell der Gleichungen der ersten vier Grade. Bei dem reichhaltigen Stoffe, welchen das Werk nicht sowohl den Algebraisten von Studium und Fach, als insbesondere dem Historiker darbietet, fehlt hier der Raum, eine Detaillierung des gesamten Inhaltes zu geben; wir beschränken uns darauf, Inhalt und Anordnung der Hauptabschnitte summarisch anzudeuten. Zum allgemeinen Verständnis der Tendenz des Werkes mufs vorweg bemerkt werden, dafs durchaus und selbst in denjenigen Partieen des Werkes, in welchen die Resultate der Forschungen der sogenannten modernen Algebra, von Hesse und Aronhold begründet, von Cayley, Salmon und Clebsch zur vollständigen Theorie ausgebildet, die gebührende Berücksichtigung finden, immer das Hauptproblem der antiken Algebra in den Vordergrund gestellt worden ist, nämlich diejenigen Werte der Variabeln zu bestimmen, welche einer gegebenen Funktion den Wert Null geben. Denn bekanntlich haben es die Untersuchungen der sogenannten modernen Algebra im strengen Sinne dieser Disziplin nur selten mit Gleichungen zu thun und werden die Methoden ihrer Auflösung nur nebensächlich behandelt; vielmehr ist der Hauptgegenstand dieses neuen Zweiges der algebraischen Analysis die Entdeckung derjenigen Eigenschaften einer binären Form, welche insbesondere durch lineare Transformationen unveränderlich bleiben, deren genaue Kenntnis aber für ein tieferes Studium der Theorie der algebraischen Gleichungen in ihrer gegenwärtigen Ausbildung unerläfslich ist.

Was Inhalt und Anordnung des in acht Kapitel zergliederten Werkes anbetrifft so enthält ,

der erste Abschnitt eine Darstellung der allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen mit einer Unbekannten und der Cayleyschen binären Formen;

der zweite Abschnitt die Lehre von den verschiedenen Transformationen und den symmetrischen Funktionen der Wurzeln, sowie die Darstellungsmethoden der Varianten, Retrovarianten, Geminanten und Diskriminanten;

der dritte Abschnitt die direkte Auflösung der partikulären Gleichungen;

der vierte Abschnitt ist dem Hauptgegenstande des Werkes gewidmet, nämlich einer systematischen Darstellung aller seit den ältesten Zeiten entdeckten Methoden der direkten Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade bei Anwendung der Substitution und der Reducenten, untermischt mit historischen Durchblicken auf die Entwicklung der Disziplin und unter steter Hervorhebung des gemeinsamen die Methoden innerlich mit einander verknüpfenden Prinzips. In diesem Kapitel finden selbstverständlich die Erfindungen der modernen Algebraisten in ausführlicher Weise ihre Berücksichtigung.

In den folgenden drei Abschnitten sind dann die Methoden der Wurzeltypen oder die Kombinationsmethoden, sowie die goniometrischen und geometrischen Methoden der Auflösung der Gleichungen in entsprechender teils systematischer, teils historischer Anordnung entwickelt. Welch einer mannigfaltigen Behandlung die Algebra der Gleichungen fähig ist, mag aus dem Umstande entnommen werden, dafs in den letzterwähnten vier Abschnitten weit über zwei Centurien von Methoden ihrer Auflösung beschrieben werden.

Das Werk schliefst mit dem achten Abschnitte, welcher ein chronologisch geordnetes Verzeichnis aller auf diesem Gebiete seit den ältesten Zeiten erschienenen Werke und Abhandlungen enthält, die die Theorie der Gleichungen in irgend einer Beziehung bereichert haben. Diese Gesamtlitteratur, von welcher grundsätzlich alle Handbücher der Algebra ausgeschlossen sind, umfafst allein einen Raum von über zwei Druckbogen, indem aufser den Schriften, welche sich auf die litteralen Gleichungen der ersten vier Grade sowie auf die partikulären Gleichungen beziehen, auch noch in zwei besonderen Abteilungen die Schriften über die Behandlung der numerischen sowie die Gleichungen fünften Grades aufgeführt sind.

druckt worden. Einer weiteren Empfehlung bedarf es wohl nicht. — Ein Auszug in dänischer Sprache ist erschienen. Eine italienische Übersetzung wird vorbereitet.

Bardey, Dr. **Ernst**, Resultate zu der Aufgabensammlung. gr. 8. geh. *M.* 1.—

Diese Resultate sind nicht im Buchhandel erschienen; sie können nur von legitimierten Lehrern direkt von der Verlagshandlung gegen Einsendung von 1 *M.* bezogen werden.

——— Arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Prorealgymnasien. Dritte Auflage. X u. 268 S. Preis *M.* 2.—

Das Buch ist, wie die Benennungen jetzt sein sollen, vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien, d. h. für sechs- und siebenklassige Schulen bestimmt, doch nicht minder für Gymnasien, Realgymnasien (Realschulen 1. Ordnung) und Oberrealschulen bis Sekunda einschließlich.

Wir teilen über dasselbe in Kürze folgendes mit: 1) die Theorie und die Aufgaben stehen in enger Verbindung mit einander. Jedes Kapitel zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Theorie enthält, der zweite die dahin gehörigen Aufgaben. Die Theorie ist gedrängt dargestellt, enthält nichts Überflüssiges und nimmt überall Bezug auf die nachfolgenden Aufgaben. — 2) Die Lehrsätze sind so einfach, so kurz und so klar bewiesen, wie es bis jetzt schwerlich in irgend einem Lehrbuche der Arithmetik geschehen ist. — 3) Besonders ist die Theorie der positiven und negativen Zahlen so vorgetragen, daß sie auch bei dem Anfänger keinen Zweifel übrig läßt. — 4) Der Stoff ist so geordnet und so dargestellt, daß die Schüler schon nach wenigen Stunden zu einer geeigneten Selbstthätigkeit Gelegenheit haben. — 5) Ein besonderer Wert ist auf die Einführung in die allgemeine Arithmetik (Buchstabenrechnung) gelegt. Es wird hiernach auch einem jüngeren Lehrer sehr leicht werden, gleich von vorneherein das Interesse der Schüler zu erregen. — 6) Die wichtigeren Lehrsätze sind von den weniger wichtigen durch den Druck unterschieden. — 7) Die Aufgaben sind so zahlreich, wie sie selbst nur in wenigen Aufgabensammlungen vorkommen. — 8) Die Erfahrungen, welche der Verfasser bei der Herausgabe seiner „methodisch geordneten Aufgabensammlung" gemacht hat, die bereits in mehr als 100 000 Exemplaren verbreitet ist, sind hier benutzt, und die Anordnung der Aufgaben nach Art und Schwierigkeit ist pädagogisch eine bis jetzt schwerlich erreichte. — 9) Die Fortschritte der Schüler hängen vorzugsweise von der Beherrschung der leichteren, einfacheren Aufgaben ab; daher enthält das Buch eine sehr große Anzahl von leichten Aufgaben, die dazu bestimmt sind, gleich in der Schule unter der Anleitung des Lehrers mündlich gerechnet zu werden. — 10) Die Gleichungen sind, wie es bereits von der Kritik anerkannt ist, nach Anordnung und Auswahl eine musterhafte Leistung. — 11) Den „graphischen Darstellungen", die bis jetzt in keinem Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik behandelt sind, ist ein besonderer Abschnitt gewidmet. Der Verfasser ist der Ansicht, daß dieser Abschnitt von großer Wichtigkeit ist und in keinem Lehrbuche der Arithmetik fehlen sollte. — 12) Die Verlagshandlung hat sich bemüht, das Buch gut auszustatten, und hinsichtlich der Aufgaben kann es sich wohl den besten anreihen. Der Preis des Buches von 2 *M* ist bei einem Umfang von 278 Seiten jedenfalls ein beispiellos niedriger.

Die „Resultate nebst Auflösungen und Kommentar zu den arithmetischen Aufgaben" sind nicht im Buchhandel erschienen; sie können nur von Lehrern direkt von der Verlagshandlung gegen Einsendung von 1 *M* bezogen werden.

Das Buch erschien 1881 in erster Auflage und mußte schon 1882 in doppelter Auflage hergestellt werden.

B. G. Teubner.